

ARAŞTIRMA MAKALESİ / RESEARCH ARTICLE

DİJİTAL GÖRÜNTÜDE SONLU MOZAIKLEME: KARE VE
TETRAKİS KARE FORMLARIN KARŞILAŞTIRILMASI*Soner SAN¹, Hülya ŞAHİNER², Osman Nuri UÇAN³, Baybora TEMEL⁴

¹Altınbaş Üniversitesi, Güzel Sanatlar ve Tasarım Fakültesi, Plastik Sanatlar Anabilim Dalı, Grafik Tasarım Bölümü, Yüksek Lisans Öğrencisi, İstanbul
sonersan@gmail.com ORCID ID: 0000-0001-5553-477X

²Doç. Dr., Altınbaş Üniversitesi, Güzel Sanatlar ve Tasarım Fakültesi, Plastik Sanatlar Anabilim Dalı, Grafik Tasarım Bölümü, Öğretim Üyesi, İstanbul
hulya.sahiner@altinbas.edu.tr ORCID ID: 0000-0002-2898-7869

³Prof. Dr., Altınbaş Üniversitesi, Uygulamalı Bilimler Fakültesi, Öğretim Üyesi, İstanbul
osman.ucan@altinbas.edu.tr ORCID ID: 0000-0002-4100-0045

⁴Doç. Dr., Trakya Üniversitesi, Güzel Sanatlar Fakültesi, Temel Eğitim Bölümü, Öğretim Üyesi, Edirne
bayboratemel@trakya.edu.tr ORCID ID: 0000-0002-6262-6143

GELİŞ TARİHİ/RECEIVED DATE: 20.03.2022 KABUL TARİHİ/ACCEPTED DATE: 25.05.2022

San, S., Şahiner, H., Uçan O.N., & Temel B., (2022). Dijital Görüntüde Sonlu Mozaikleme: Kare ve Tetrakis Kare Formların Karşılaştırılması. *Aurum Sosyal Bilimler Dergisi*, 7(2), 211-246.

Öz

Tarihte sonlu geometrik dizilimle oluşturulan erken dönem görüntü örgüsü örnekleri; mozaik sanatı, yer karo döşemeleri ve dokuma tekniklerinde görülmektedir. Özellikle 19. yüzyılın ilk yarısında Joseph Marie Jacquard'ın dokuma tezgahlarında kullandığı şablon kartlar üzerinde bulunan (boş-dolu) ilmik referanslarının (delikler), günümüzde kullanılan bilgisayarların ikilik sayı (0-1) sistemlerinin (bit) altyapısını ve dijital görüntü örgüsünün oluşturulmasını sağladığı bilinmektedir. Günümüzde dijital görüntü; iki boyutlu düzlemde (x, y) kare forma sahip noktaların (*pixel*) sonlu dizilimi ile oluşturulmaktadır. Bu sonlu mozaikleme dijital geometride raster görüntüyü oluşturmada ve düşük sayıdaki dizilimlerde (*resolution*) geometrik kırılmalara neden olarak görüntünün nesnel bütünlüğünü bozmaktadır.

* Makale içerisinde kaynakçası belirtilmemiş tüm görsel, şekil ve tablolar araştırma süresince elde edilen verilerden derlenerek makalenin yazarı tarafından özel olarak hazırlanmıştır.

Bu bilgiler ışığında, dijital geometride kare form ile Öklidyen yarı düzenli mozaikler grubunda yer alan kesik kare dizilimin (*truncated quadrille*) çift-tekdüze türevi olan tetrakis kare (4.8.8) formun (*kisquadrille*) oluşturduğu görüntü örgüsünde nitel ve nicel farklılıkların karşılaştırılması bu araştırmanın konusunu oluşturmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Dijital görüntü, Dijital geometri, Mozaikleme, Tetrakis kare dizilimi

FINITE TESSELLATION IN DIGITAL IMAGE: COMPARISON OF SQUARE AND TETRAKIS SQUARE FORMS

Abstract

Examples of early image weaves created with finite geometric sequences in history; It is seen in mosaic art, floor tiles and weaving techniques. Especially in the first half of the 19th century, Joseph Marie Jacquard's use of template cards in weaving looms formed the basis of the digital infrastructure and digital image of computer technologies. Today, digital image; It is formed by the finite array of square-shaped points (pixels) in the two-dimensional plane (x, y) . This finite mosaicing creates a raster image in digital geometry and causes geometric breaks in low number of sequences (resolution) and disrupts the objective integrity of the image.

In the light of this information; The subject of this research is to compare the qualitative and quantitative differences in the image pattern formed by the "truncated quadrille" double-uniform derivative of the square form and the "truncated quadrille" of the Euclidean semi-regular mosaics group in digital geometry, that is, the "kisquadrille" formed by the tetrakis square "4.8.8" form.

Keywords: Digital image, Dijital geometry, Tessellation, Tetrakis square tiling

1. GİRİŞ

Tarihte sonlu geometrik dizilimle oluşturulan ilk görüntü örgüsü örnekleri; mozaik sanatı, yer karo döşemeleri ve dokuma tekniklerinde görülmektedir. Özellikle 19. yüzyılın ilk yarısında *Joseph Marie Jacquard*'ın dokuma tezgahlarında (boş-dolu ilmik değerlerine sahip olan) şablon kartları kullanması, günümüzde kullanılan bilgisayarların ikilik sayı (0-1) sistemini (*binary*) ve dijital görüntü örgüsünün temel değerlerini oluşturmuştur. Günümüzde dijital görüntü; iki boyutlu düzlemde (x, y) kare forma sahip noktaların (*pixel*) sonlu dizilimi ile oluşturulmaktadır. Bu sonlu mozaikleme dijital geometride raster görüntüyü oluşturmakta ve düşük sayıdaki dizilimlerde (*resolution*) geometrik kırılmalar meydana getirerek görüntünün nesnel bütünlüğünün bozulmasına neden olmaktadır (Eco, 2019a; Jacquard machine, 2002; Bit, 2001; Digital geometry, 2003; Raster graphics, 2001; Dijital görüntü, 2020; Computer graphics, 2008).

Bu bilgiler ışığında, dijital geometride kare form ile tetrakis kare formun oluşturduğu görüntü örgüsünü etkin biçimde karşılaştırabilmek amacı ile; bu araştırmanın ikinci bölümünde (Genel Bilgiler); dijital görüntünün ve dijital geometrinin temelini oluşturan kavramlar hakkında geniş bir literatür taraması yapılmıştır. Araştırmanın üçüncü bölümünde (Gereç ve Yöntem) araştırmanın yöntemi ve kısıtları, araştırmanın evreni ve verilerin analiz yöntemleri ve araştırmanın hipotezleri belirtilmiştir. Araştırmanın dördüncü bölümünde (Bulgular) kare formunun tetrakis kare formu ile karşılaştırılmasına ait temel bulgular, şema üzerindeki karşılaştırmalar ve ölçümler, alternatif geometrik formun mevcut yapı

ile uyumluluğuna dair bulgular ve karşılaştırma sonuçlarının sayısal verilere dönüştürülerek analiz edilmiştir. Araştırmanın beşinci ve son bölümünde (Tartışma ve Sonuç) elde edilen bulgulardan oluşan verilerin yorumlanması, elde edilen sonuçlardaki sapmaların tartışılması ve araştırmanın hipotezleri ile kontrol edilmesi "Tartışma" başlığı altında, araştırmada elde edilen tüm verilerin özeti "Sonuç" başlığı altında, araştırmanın alt amaçlarına yönelik görüşler ise "Öneriler" başlığı altında aktarılmıştır.

Sonuç olarak bu araştırmada; dijital geometride kare form ile Öklidyen yarı düzenli mozaikler grubunda yer alan kesik kare dizilimin (*truncated quadrille*) çift-tekdüze dizilimi olan tetrakis kare (4.8.8) formunun (*kisquadrille*) oluşturduğu görüntüde meydana gelen nitel ve nicel farklılıkların karşılaştırılması sonucu dijital görüntüde daha nitelikli görüntünün elde edilip edilemeyeceğine dair bulguların elde edilmesi amaçlanmıştır.

Bu temel amaç doğrultusunda, araştırmanın alt amaçları şunlardan oluşmaktadır;

- I. Kare form ile tetrakis kare formunun temel geometrik şemalar üzerinde karşılaştırılması ve karşılaştırma sonuçlarının sayısal verilere dönüştürülmesi.
- II. Kare form ile tetrakis kare formunun iki boyutlu grafik şema üzerinde karşılaştırılarak görüntü niteliklerinin belirlenmesi.
- III. Kare form ile tetrakis kare formunun iki boyutlu gerçek görüntü şema üzerinde karşılaştırılarak görüntü niteliklerinin belirlenmesi.
- IV. Tetrakis kare formunun sayısal veriler ile eşleştirilmesi, kartezyen koordinat sistemi üzerinde kare matris değerlerin oluşturulması ve oluşan algoritmanın kodlama örnekleminin yapılması.
- V. Yapılan karşılaştırmalar sonucunda oluşan verilerin analiz edilmesi ve bulguların araştırma hipotezleri ile uyumluluğunun sağlanması.

Bu araştırma dijital geometri üzerine yapılan çalışmaların gelişmesine katkı sunmayı hedeflerken diğer yandan içeriğinde oluşan tespitleri, bulguları, hipotezleri, sonuç ve önerileriyle bu alanda yapılacak diğer bilimsel çalışmalara referans bilgiler sağlamayı ve araştırmacının çalışmasını genişletmesine katkıda bulunmayı hedeflemektedir.

2. GENEL BİLGİLER

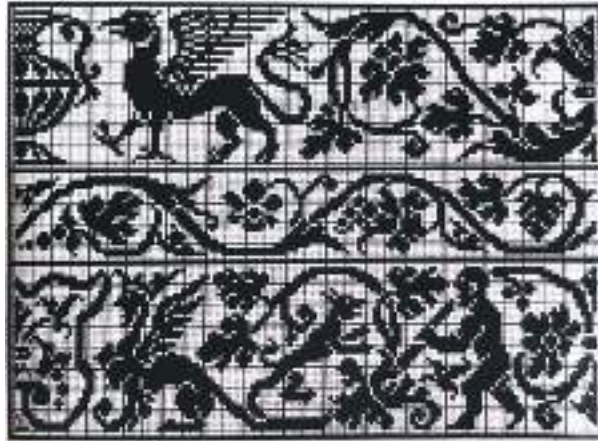
2.1. Görüntü

Görüntü kelimesi TDK tarafından "Gözlemciye, belli bir noktada varmış gibi görünen, ama gerçekte herhangi bir ışık ışınının düşmediği ya da bir ışının çıkmadığı noktadaki görüntü." şeklinde tanımlanmaktadır (www.tdk.gov.tr). Bilimsel olarak tarihlendirilen ve daha ileri dönemde (yerleşik düzene geçiş ve kentleşme sonrası) yapılmış mozaikler, belirli bir sisteme dayalı görüntü örgüsü oluşumunda günümüzde kullanılan piksel kavramı ile önemli oranda benzerlikler içermektedir (**Görsel 2.1**).



Görsel 2.1. At Yarışı, Hipodromdan Sahneler, I. yüzyıl, Mozaik, Lyon, Galya-Roma Müzesi

Benzer yapıya sahip sistemli görüntü oluşturma prensiplerinin erken izleri nakış ve dokuma tekniklerinde görülmektedir. *Ernst Hans Gombrich'e* (Gombrich, 2015, s. 35) göre: "Boş-dolu seçeneklerinden oluşan böyle bir dizgeyi uygulayan bir dizi sanatsal teknik bulunmaktadır, örneğin belli ağ ve dantel örgülerinde zemin tek tek ağ gözleri ya doldurmaktadır ya da boş bırakmaktadır (**Görsel 2.2**). Bu arada doldurulmuş alanların figür ya da zemin anlamını taşıması önemli değildir. Önemli olan, iki gösterge arasında kurulan bağıdır¹."



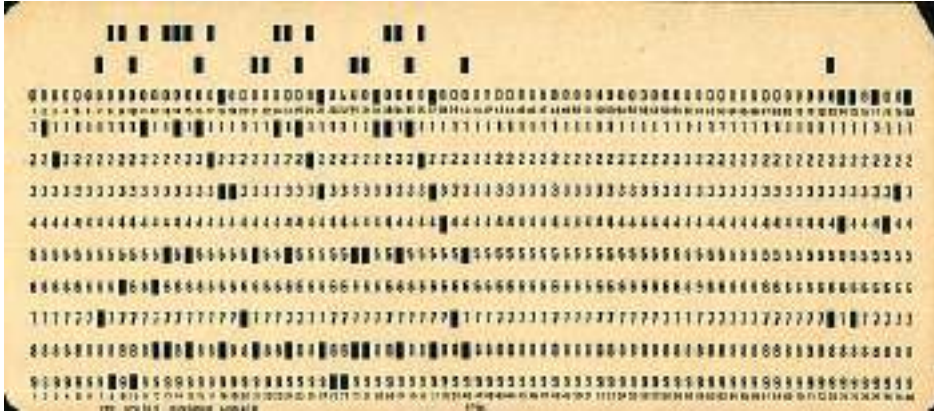
Görsel 2.2. Dantel İşleme İçin Örnek. Venedik, 1568

1839 yılında *J.M. Jacquard*'ın, İngiliz matematikçi, analitik filozof, makine mühendisi, mucit ve programlanabilir bilgisayar fikrini ortaya atan bilgisayar bilimcisi *Charles Babbage*'den ilham alarak geliştirdiği Jakarlı dokuma tezgâhının analitik motorunda delikli kartları kullanması (**Görsel 2.3**) günümüzde bilgisayar ve dijital görüntüleme sistemlerinin altyapısı olan (**Görsel 2.4**) ikilik veri (*bit*) sisteminin temelini oluşturduğu anlaşılmaktadır (Hyman, 2007).

¹Kurulan bağ ile kastedilmek istenen; dolu ve boş alanların bütünde oluşturduğu görüntüdür.



Görsel 2.3. Bilgi Delikli Kartları Gösteren Bir Jakarlı Dokuma Tezgahı, *National Museum of Scotland*



Görsel 2.4. Yirminci Yüzyılın Ortalarından 12 Sıralı ve 80 Sütunlu Bir IBM Delikli Kart

2.2. Dijital Görüntü

Dijital görüntü (Gonzalez & Woods, 2018); “Dijital görüntü piksel olarak da bilinen resim öğelerinden oluşan, her biri yoğunluğu için sonlu, ayrık miktarlarda sayısal gösterime veya gri alanı ile sırasıyla x-ekseni ve y-ekseni üzerinde belirtilen uzamsal koordinatlarla girdi olarak beslenen iki boyutlu işlevlerinden bir çıktısı olan gri gösterime sahip bir görüntüdür. Görüntü çözünürlüğünün sabit olup olmamasına bağlı olarak, vektör veya raster tipinde olabilmektedir.” şeklinde tanımlanmaktadır.

Dijital görüntü türleri (Computer graphics, 2008); “Günümüzde bilgisayar tabanlı görüntü oluşumunun, vektör (dinamik görüntü) ve raster (statik görüntü) olmak üzere iki temel prensibe sahip olduğu bilinmektedir” şeklinde tanımlanmaktadır (**Görsel 2.5**).



Görsel 2.5. Vektör (*Vector*) Görüntünün Raster (*Bitmap*) Görüntüye Oranla 7x Büyütülerek Değer Kaybı Yaşamadığını Gösteren Temsili Görüntü

2.2.1. Vektör görüntü

Vektör görüntü bilgisayar tabanlı grafik olarak; *"temelde bir veya daha fazla sayısal referans noktasına ait koordinatın düz ve eğrilerle birleşmesi sonucu ortaya çıkan 2D (iki boyutlu) veya 3D (üç boyutlu) görüntü biçimidir"* (Vector graphics, 2001). Vektör görüntü türü genel olarak mühendislik, mimari, tasarım, haritacılık ve tipografi gibi alanlarda yaygın olarak kullanılmaktadır. Vektörel görüntü, içinde barındırdığı referans koordinatlara ve nesnel özelliklere bağlı olarak her ölçekte yeniden oluşturulmakta ve bu çalışma prensibi nedeniyle görüntü örgüsünde herhangi bir değer kaybı oluşmamaktadır. Bilgisayar ortamında üretilen vektör görüntü çıktıları arasında SVG, WMF, AI, EPS, PDF, CDR, HTML, DFX ve DWG dosya formatları yaygın olarak kullanılmaktadır. Ayrıca bilgisayar grafiğinde kullanılan vektör kavramı ile matematikte kullanılan vektör kavramının birbiri ile karıştırıldığı da görülmektedir.

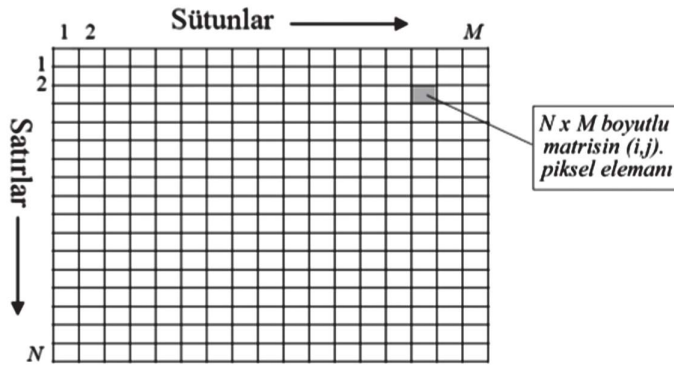
2.2.2. Raster görüntü

Raster (*bitmap*) görüntü 2D grafik modeli olarak; bilgisayar, dijital fotoğraf makinası, kamera, tarayıcı (*scanner*), radar, tablet, telefon ve benzeri birçok teknolojik cihaz tarafından oluşturulabilmektedir.

Teknik olarak raster görüntü; *"yükseklik ve genişlik sayısı kadar piksel sayısına sahip olan ve her bir pikselin karşılık bit değeri ile eşleşmesinden oluşmaktadır"* (Raster graphics, 2001). Her bir bit değeri, o pikselin oluşturduğu renk matrisine ait sabit değerleri barındırmaktadır. Vektör bir görüntü değer kaybı olmadan raster değerlere dönüştürülebilirken, sabitlenen bit değerleri nedeniyle raster bir görüntü değer kaybı olmadan vektörel değere dönüştürülemez. Bilgisayar ortamında derlenen ve piksellerin bit değerlerini taşıyan raster görüntü çıktıları arasında JPG, JPEG, PNG, APNG, GIF, WebP, BMP ve MPEG4. dosya formatları yaygın olarak kullanılmaktadır.

2.2.3. Dijital görüntüde piksel kavramı

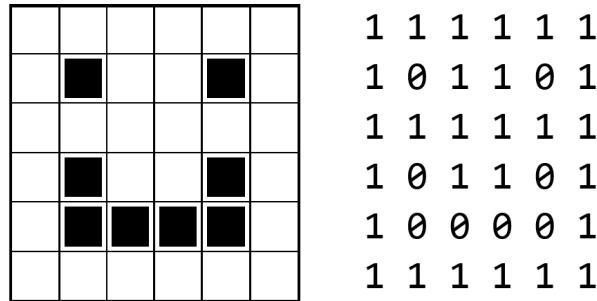
Adını (*Picture x Element*) teriminden alan piksel (*pixel*), dijital görüntü örgüsünü oluşturan en küçük geometrik parçacık veya bir ölçü birimi olarak tanımlanmaktadır. Günümüzde bilgisayar, cep telefonu, tablet, televizyon ve benzeri birçok teknolojik cihazın donanımsal bir ekrana (*display device*) sahip olduğu ve bu ekranların piksel altyapısı ile çalıştığı bilinmektedir. Pikseller uzamsal (yazılımsal) ve fiziksel (donanımsal) olarak iki kavrama ayrılmaktadır. Uzamsal olarak bilgisayar ortamında tasarlanarak veya analog görüntüden dönüştürülerek elde edilen piksellere ait sayısal verilerin, donanımsal yapıda bulunan görüntü ızgarasına aktarılarak çalıştığı anlaşılmaktadır. Temelde görüntü ızgarasına bağlı olan RGB değerlerindeki LED ışıkların veya arka planda beyaz LED ışığın RGB renk filtreleri aydınlatmasını sağlayan matrisler ile donanımsal görüntünün oluştuğu anlaşılmaktadır.



Görsel 2.6. $N \times M$ Büyüklüğüne Sahip 2-B Bir Sayısal Görüntünün temel yapısı

2.2.4. Temel düzeyde dijital görüntünün oluşumu

Bilgisayar teknolojisinde oluşturulan görüntü ızgarası, yatay ve dikey ekseninde her biri bir pikselden oluşan ve her bir pikselin en küçük veri birimi olan bitlerden meydana gelmektedir. Bilgisayar üzerinde oluşturulan en temel görüntü, her bir pikselin 1 bitlik değere (0 = siyah & 1 = beyaz) sahip olduğu görüntü ızgarasıdır (**Görsel 2.7**).



Görsel 2.7. 1 Bitlik Değerle Oluşturulan Toplam 36 Bit Görüntü Örneği (Sol), Görüntünün Sahip Olduğu Sayısal Bit Veri Değerleri (Sağ), (0 = Siyah, 0 = Beyaz)

Normal görme yetisine sahip olan bir insanın yaklaşık 10 milyon farklı rengi algılayıp ayırt edebildiği bilinmektedir (Judd & Wyszecki, 1975). Bilgisayar ortamında üretilen yapay görüntüler; piksel başına düşen 24 bitlik veri değeri sayesinde bir insanın algılayabildiği değer aralığının da üstünde ($2^{24} = 16.777.216$) renk sayısı üreterek gerçekçi görüntü değerlerini sağlamaktadır.

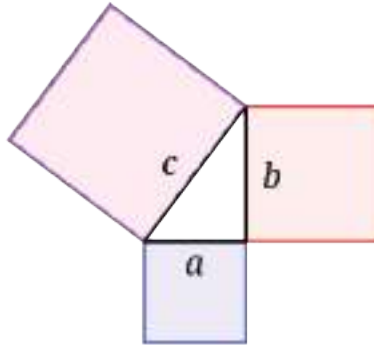
2.3. Dijital Geometrinin Tanımı

Geometri kelimesi TDK tarafından; “Nokta, çizgi, açı, yüzey ve cisimlerin birbirleriyle ilişkilerini, ölçümlerini, özelliklerini inceleyen matematik dalı, hendese.” şeklinde tanımlanmaktadır (www.tdk.gov.tr).

Geometri mekânsal ilişkilerle ilgilenen bilgi alanı olarak ortaya çıkmıştır (Eves, 1990). Modern çağ öncesi matematiğin iki alanından biri olan geometri (diğeri aritmetik) matematiksel kesinliği ve bugün hala kullanılmakta olan aksiyomatik (*axiomatic*) yöntemin Öklid’in Elementleri (*Euclid’s Elements*) eserinde tanımlanması ile kökten değiştirilmiştir. Modern çağ sonrası geometrik kavramlar yüksek bir soyutlama ve karmaşıklık düzeyine genelleştirilmesi kalkülüs ile soyut cebir yöntemlerinin geliştirilmesini sağlamıştır.

2.3.1. Pisagor Teoremi

Miletli *Thales* (M.Ö. 635-543) tarafından oluşturulduğu ve Pisagor (M.Ö. 582-496) tarafından tümdengelim (dedüksiyon) ile geliştirilen (**Görsel 2.8**) Pisagor bağıntısı (Pisagor teoremi) Öklid geometrisinde üçgenin kenarları arasındaki temel ilişkiyi kuran ($a^2 + b^2 = c^2$) ilk teoremlerden biridir (Pythagorean theorem, 2021).



Görsel 2.8. Pisagor Teoremi: Bacaklar (a ve b) İki Karenin Alanlarının Toplamı, Karenin Hipotenüs (c) Üzerindeki Alanına Eşittir

Öklid (M.Ö. 325-265) ise üçgenin kenarları arasındaki temel ilişkiyi “Öklid’in Elementleri” eserinde şu şekilde açıklanmıştır (Pythagorean theorem, 2021);

“Büyük kare, sol ve sağ olmak üzere iki dikdörtgene bölünür. Sol taraftaki dikdörtgen alanının yarısına sahip bir üçgeni oluştururken üstteki karenin alanı alttaki dikdörtgenin alanına eşit olur. Bu argümanı, sağdaki dikdörtgen ve kalan kare için benzer bir versiyon takip eder”.

2.3.2. Öklid geometrisi ve aksiyomları

Öklid geometrisi ve aksiyomları kuşkusuz ki dijital geometrinin temellerini oluşturmaktadır. Öklid'in dijital geometriyi kapsayan aksiyomları şu şekilde sıralanmaktadır (Öklid, 2005);

Öklid'in postulatları:

- I. Herhangi bir noktadan herhangi başka bir noktaya bir düz doğru çizmek mümkündür.
- II. Bir tane doğru parçasını her iki yöne de sürekli bir şekilde uzatmak mümkündür.
- III. Herhangi bir merkez ve herhangi bir yarıçap ile bir çember tanımlamak mümkündür.
- IV. Bütün dik açıların birbirine eşit olduğu doğrudur.
- V. Eğer iki doğru ile kesişen bir doğru çizilirse, iki doğrunun birbirine bakan tarafında yer alan ve onları kesen doğrunun bir tarafında kalan iki açının toplamı iki dik açıdan küçükse bu iki doğru açıların toplamının iki dik açıdan az olduğu tarafta uzatılmaya devam ederlerse ileride bir noktada kesişecekleri doğrudur. (Bu postulat paralel doğrular kesişmez şeklinde bilinen postulardır.)

Ortak kanılar:

- I. Bir şeye eşit olan başka şeyler birbirlerine de eşittirler.
- II. Eğer eşit miktarlara eşit miktarlar eklenirse, elde edilen bütünler de birbirlerine eşittir.
- III. Eğer eşit miktarlardan eşit miktarlar çıkarılırsa, kalanlar da birbirlerine eşittir.
- IV. Birbirleriyle çakışan (özellikleri açısından örtüşen) şeyler birbirlerine eşittir.
- V. Bütün parçadan büyüktür.



Görsel 2.9. Oxyrhynchus'ta Bulunan ve Yaklaşık MS 100'e Tarihlenen Öklid'in Elementleri Eserinin Hayatta Kalan En Eski Parçalarından Biri (P. Oxy. 29). II. Kitap, 5. Bölümde Bulunan Diyagram Önermesinin Bir Parçası

Öklid'in Elementleri eserinde tanımlanan geometrik sistem, uzun zamandır basitçe "geometri" olarak biliniyordu ve mümkün olan tek geometri olarak kabul ediliyordu (Heath, 1956). Bugün, bu sistem matematikçilerin 19. yüzyılda keşfettiği Öklidyen olmayan geometrilerden ayırt etmek için Öklid geometrisi olarak adlandırılmaktadır.

2.3.3. Öklidyen düzenli dışbükey mozaikleme modelleri

Öklid tarafında belirlenmiş 11 adet (**Görsel 2.10**) düzenli dışbükey mozaikleme (döşemesi) ve bu dizilimden elde edilen 32 farklı düzenli ve yarı düzenli dışbükey çokgen türevi bulunmaktadır (List of Euclidean uniform tilings, 2005). Ayrıca bu 11 dışbükey düzenli döşemeye ek olarak yıldız çokgenler ve ters yönde köşe konfigürasyonları kullanan 14 dışbükey olmayan mozaikleme de olduğu bilinmektedir.



Görsel 2.10. Öklid'in Dışbükey Çokgenlerine Ait Tanımlama Grafiği

Düzenli döşemeler, konfigürasyonunu oluşturan her bir şeklin dışbükeyindeki nokta sayısının dizilimi ile listelenmektedir. Örneğin: 4.8.8, dört noktadan oluşan bir kare form ve sekiz noktadan oluşan iki sekizgen formun kombinasyonunu ifade etmektedir. Her bir şeklin merkezlerindeki noktaların birleşimiyle oluşan form, çift yüzeyde (yansımada) düzenli veya düzensiz mozaikleme formunu oluşturmaktadır. Bu mozaikleme formları günümüzde Schwarz üçgenleri (4.4.2), (6.3.2) veya (3.3), Wythoff sembolleri ve Coxeter-Dynkin diyagramları ile temsil edilebilmektedir. Ayrıca simetrik formlar Coxeter grupları [4.4] kare simetrik, sekizgen simetrik [6.3 veya 3^[3]] ile tanımlanmaktadır.

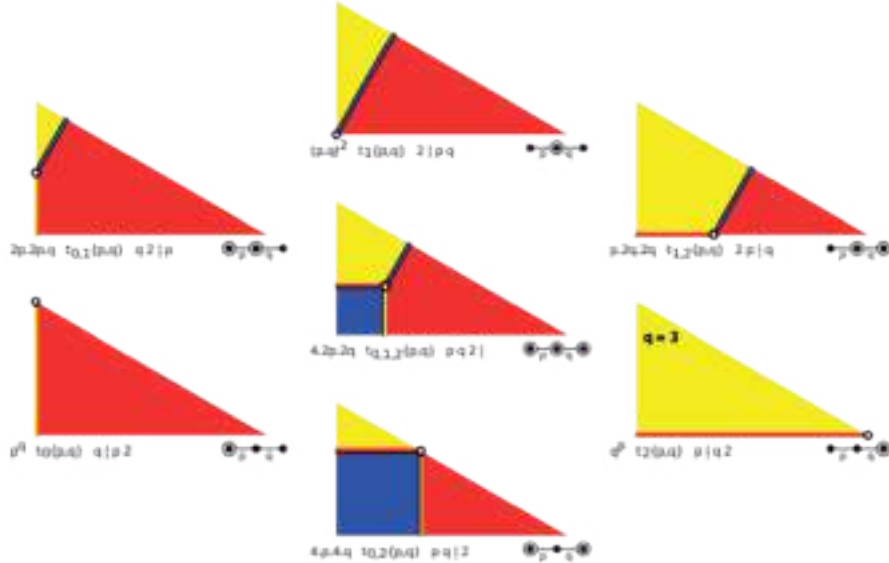
2.3.4. Schwarz üçgeni

Geometride, adını Hermann Schwarz (1843- 1921)'dan alan Schwarz üçgeni köşe açıları π/p , π/q ve π/r olarak temel alınan (p, q, r) tam sayılarının farklı düzlemlerde (uzaylarda) oluşturulabilen üçgen modeline dayanmaktadır (Schwarz triangle, 2005). Schwarz üçgeni, üçgen bir grafikte temsil edilir. Her nokta Schwarz üçgeninin bir kenarını (aynasını) temsil eder. Her kenar π /tepe noktası açısı olan yansıma sırasına karşılık gelen rasyonel bir değerle ifade edilmektedir.

2.3.5. Wythoff yapısı

Geometride, Wythoff sembolü: Schwarz üçgeni (p, q, r) içinde tek tipte çok yüzlü veya tek düze döşemeyi temsil eden bir gösterimdir (Wythoff symbol, 2006). İlk olarak Coxeter, Longuet-Higgins ve Miller tarafından tek düze çok yüzlü üçgenlerinin dizilimini (**Görsel 2.11**) sınıflandırmak için kullanılmıştır.

Daha sonra, temel bir simpleks içinde n-boyutlu uzayda tek tip politopları ve petekleri işaretlemek için Coxeter diyagramı geliştirilmiştir. Wythoff yapısı temel bir üçgen üzerinde seçilen bir başlangıç noktasından uzaklığı sıfırdan büyük olan başka bir nokta ile birleşir ve iki nokta arasında bir doğrular bırakır. Bıraktığı her doğruyu Schwarz tam sayısı ile tanımlar ve yansıma noktasını (başlangıç noktasını) ifade etmek için dikey çubuk sembolünü “|” kullanılır.



Görsel 2.11. Wythoff Sembolü Oluşturulan 7 Farklı Üçgen Örneklemesi

2.3.6. Coxeter-Dynkin diyagramı

Harold Scott MacDonald Coxeter (1907-2003) sonlu Öklidyen yansıma gruplarının soyut bir yansıma grubunu (Görsel 2.12) oluşturmaktadır (Hall, 2003). Ayrıca Coxeter; Öklid düzlemi ve hiperbolik düzlemini düzenli mozaiklerine karşılık gelen üçgen gruplarını sonlu ve sonsuz sınıflandırmalarını tanımlamıştır (Görsel 2.13).

Type	Finite				Affine	Hyperbolic		
Geometry					...			
Coxeter								
Order	2	4	6	8	2p	∞	∞	

Görsel 2.12. Coxeter Yansıma Grupları Temel Sınıflandırması

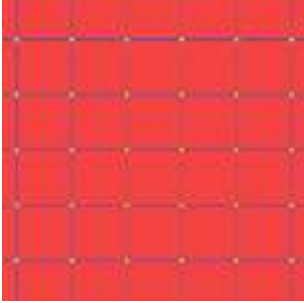

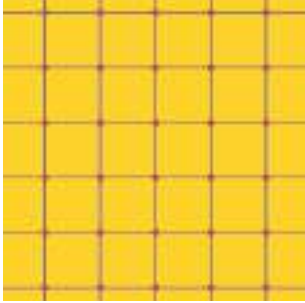
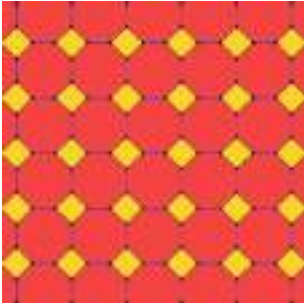

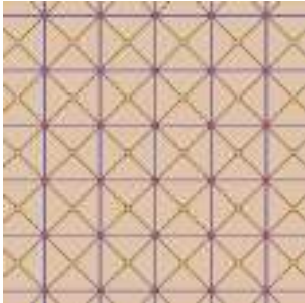
Small index subgroups of p4m, [4,4], (*442) [130]							
index	1		2		4		
Fundamental domain diagram							
Coxeter notation	[1^*,4,1,4,1] = [4,4]		[1^*,4,4]	[4,4,1^*]	[4,1^*,4]	[1^*,4,4,1^*]	[4^*,4^*] = [[4,4^*,2^*]]
Coxeter diagram							
Orbitoid			*442		*2222		22x
Semidirect subgroups							
index			2		4		
Diagram							
Coxeter			[4,4^*] 	[4^*,4] 	[[4,4,2^*]] 	[1^*,4,1^*,4] = [[2^*,4,4]] 	[4,1^*,4,1^*] = [[4,4,2^*]]
Orbitoid			4^*2		2^*22		
Direct subgroups							
index	2		4		8		
Diagram							
Coxeter	[4,4]^+ 	[1^*,4,4^*] = [4,4^*]^+ 	[4^*,4,1^*] = [4^*,4]^+ 	[[4,1^*,4,2^*]] = [[4,4,2^*]]^+ 	[1^*,4,1^*,4,1^*] = [[4^*,4,2^*]] = [4^*,4]^+ 		
Orbitoid	442				2222		

Görsel 2.13. Coxeter P4m Küçük Alt Grupların ve Yansıma Değerlerinin Sınıflandırılması

2.3.7. Tetrakis kare (4-8-8) mozaikleme

Geometride (Tetrakis square tiling, 2005; Special right triangle, 2005) tetrakis kare mozaikleme (döşemesi); "Öklid düzleminin bir döşemesi olarak, her karenin merkez noktasından dört ikizkenar dik üçgene bölüdüğü ve sonsuz bir çizgi dizilimi oluşturan kare döşeme modeli" olarak tanımlanmaktadır.

(Tablo 2.1). Aynı zamanda, bir ızgaranın her karesini iki diyagonal ile üçgenlere bölerek her bir üçgenin 45° (π/4), 45° (π/4) ve 90° (π/2) derecelik açılara veya iki kenar uzunluğu eşit ve bir kenarı √2 faktörü ile ölçeklenmiş dik üçgenlerden oluşturulabilir. Bu düzenli form Conway, Burgiel ve Goodman-Strauss tarafında "kiskadrille" olarak anılmaktadır.

Tekdüze mozaikleme (<i>Platonic and Archimedean</i>)	Tepe açı formu ve çift yüzey <i>Wythoff</i> sembolleri Simetri grubu <i>Coxeter</i> diyagramları	Tek tipte çift mozaikleme (Yapraklar veya <i>Katalan</i> mozaiği)
	 <p>4.4.4.4 (sr-4²) 41 2'4 [44], [4,4], (*442) *4/4* *4/4* *4/4* *4/4* *4/4* *4/4*</p>	
Kare mozaikleme (<i>quadrille</i>)		Çift kare mozaikleme (<i>quadrille</i>)
	 <p>4.8.8 2'4.4 4.4.2'1 [44], [4,4], (*442) *4/4* *4/4* or *4/4*</p>	
Kesilmiş kare mozaikleme (<i>truncated quadrille</i>)		Tetrakis kare mozaikleme (<i>kisquadrille</i>)

Tablo 2.1. *Coxeter* [4,4] Grubu, Kare Dizilim (4.4.4.4) ve Tetrakis Kare (4.8.8) Mozaikleme Yapısına Ait Detaylar Tablosu

3. GEREÇ VE YÖNTEM

3.1. Araştırmanın Yöntemi ve Kısıtları

Araştırmada görüntü örgüsünde en küçük parçacığın geometrik formu grafik şablonlar üzerinde incelendiği ve karşılaştırıldığı için nitel bir araştırma olarak tasarlanmıştır.

Bu amaca uygun olarak görüntü örgüsünü oluşturan kare form ve ona alternatif olarak tetrakis kare formu üç adet temel geometrik (kare, altıgen ve eşkenar üçgen) formların içerisinde nesnel olarak ölçümlenmiştir. Görüntüyü oluşturan her bir parçacığın, geometrik şablon üzerinde doldurduğu (*filling*) alan bilgisi *Pick* teoremi ($A = i + \frac{b}{2} - 1 = br^2$) ile sayısal verilere dönüştürülerek ilgili parçacığın nitelikli görüntü oluşturmadaki başarısı ve yüzdesi hesaplanmıştır.

Buna ek olarak her bir parçacık aynı (düşük bit değerli) grafiği kendi geometrik formu ile oluşturularak görüntü örgüsündeki etkiler nesnel olarak incelenmiştir.

3.2. Araştırmanın Evreni ve Verilerin Analiz Yöntemi

Araştırmada gerekli olan bilgiye ve sonuca ulaşmak amacı ile grafikler ve grafiklerden elde edilen sayısal veriler (parametreler) baz alınmış ve bu nedenle örnekleme süreci ve yöntemi olarak istatistik yöntemi tercih edilmiştir. Araştırmanın ana kütle görüntü örgüsünü oluşturan en küçük parçacıklara ait geometrik formların nesnel olarak karşılaştırılmasından oluşmaktadır. Bu ana kütle doğrultusunda, kare form ile Öklidyen yarı düzenli mozaikler grubunda yer alan kesilmiş kare dizilimin (*truncated quadrille*) çift-tekdüze dizilimi olan tetrakis kare (4.8.8) formu (*kisquadrille*) da dahil olmak üzere toplamda 2 geometrik form ve bu formların meydana getirdiği görüntü mozaiklemeleri araştırmanın örneklemini oluşturmaktadır.

3.3. Araştırmanın Hipotezleri

Literatür taraması ile şu bulgular elde edilmiştir: Görüntü oluşturma ve kaydetme tarih boyunca var olan bir kavramdır. Görüntü oluşturmada formüle edilmiş bir sistem arayışı hem bilim insanlarının çalışmalarında hem de sanatçıların eserlerinde açıkça görülmüştür. Mozaik ve dokuma sanatlarının dijital görüntünün oluşmasında önemli rolü olduğu anlaşılmıştır. Dijital görüntünün oluşması ve işlenmesi dijital geometri ile sağlanmaktadır. Öklidyen geometri, Cebirsel geometri, lineer cebir, kare matrisi ve kartezyen koordinat sistemi, bit verisi ve sayısal renk sistemi kavramları dijital görüntünün işlenmesi ve oluşmasını sağlamaktadır. Dijital görüntü mozaikleme (*tessellation*) en küçük parçacık olarak kare forma sahip piksellerin dizilimi ile raster görüntüyü oluşturmaktadır. Kare form mozaikleme düşük sayıdaki dizilimlerde geometrik kırılmalara neden olarak görüntünün niteliğini düşürmektedir.

Tüm bu bilgiler ışığında araştırmanın hipotezleri aşağıda sıralanmıştır;

- Kare formlar x ve y koordinatları dışında nitelikli görüntü oluşturmamıştır.
- Tetrakis kare dizilimi %98 oranında nitelikli görüntü oluşturmuştur.
- Tetrakis kare formu, kare forma kıyasla en az %25, en çok %68,3 ve ortalama %32,6 oranda daha nitelikli görüntü oluşturmuştur.
- Tetrakis kare formu kartezyen koordinat sistemi üzerinde tanımlanmış, kare matrisi ile oluşan algoritma jenerik kanyak kodunda örneklenmiştir.
- Tetrakis karesi sabit ızgarada, 4bit (*monochrome*), 32 bit (gri gama), 96 bit RGB (*truecolor*) ve 128 bit RGB + alfa kanal değerleriyle görüntü üretebileceği anlaşılmıştır.

4. BULGULAR

4.1. Geometrik Değerler

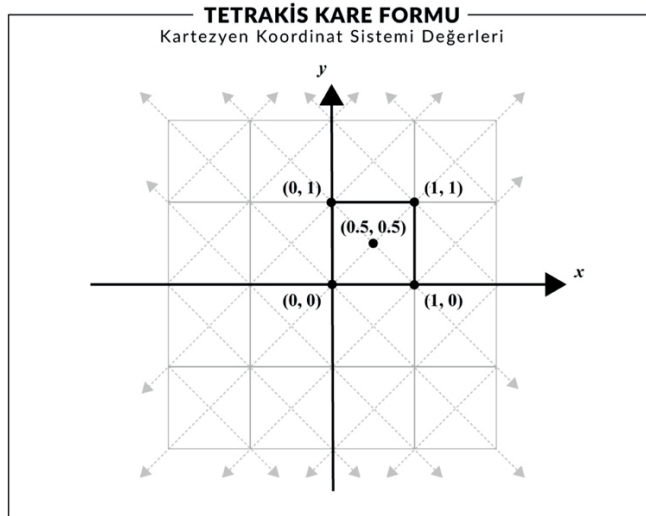
Tetrakis kare formu, bir kare formun merkezinden $+45^\circ$ ve -45° (135°) derecede bölünmesi sonucu elde edilen dört adet dik üçgenin ($a=1, b=1, c=\sqrt{2}$) veya 4 adet dik üçgenin ($45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$) tam sayı bir karenin merkez noktasından $45, 90, 135$ ve 180 derece döndürülmesi ve 4'lü gruplar halinde sonlu mozaiklenmesi sonucunda elde edilen görüntü örgüsünü oluşturduğu anlaşılmaktadır (Bkz. **Şekil 4.1**).



Şekil 4.1. Tetrakis Kare Formunun Oluşturduğu Geometrik Değerleri Temsil Eden Grafik

4.2. Sayısal Değerler

Tetrakis kare formu tam sayı Kartezyen koordinat sisteminde ($x = 0, y = 0$) ekseninden, ($x = 1, y = 1$) eksenine çizilmiş kare formun, merkezi olan ($x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}$) noktası referans alınarak; $a = 0, b = \frac{1}{2}, c = 1$ sabit değerleri ile örneklenmiştir (**Şekil 4.2**).



Şekil 4.2. Tetrakis Kare Form Örneğinin Kartezyen Koordinat Sistemi Üzerinde ($a = 0, b = \frac{1}{2}, c = 1$) Gösteren Grafik

Kartezyen koordinat sistemi üzerinde x ve y konumlarına ait a , b ve c değerlerine ait döngü "A" sigma gösterimi şu biçimdedir;

$$A = \sum_{k=0}^2 1 \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Tetrakis kare formun oluşumu kartezyen koordinat sistemi üzerinde x ve y konumlarına ait a , b ve c referans sayıları ile; "A" matrisinde (i ve j) satır ve sütunlarda, (n ve m) sayısında gösterimi şu biçimdedir;

$$A = \begin{bmatrix} (a, c) & (c, c) & (b, b) \\ (c, c) & (c, a) & (b, b) \\ (c, a) & (a, a) & (b, b) \\ (a, a) & (a, c) & (b, b) \end{bmatrix}$$

"A" matrisine 8 bitlik RGB renk değer aralığı verisi dördüncü sütuna eklenerek tetrakis kare formunu oluşturan kare matrisi şu şekilde tanımlanmıştır;

$$A = \begin{bmatrix} (a, c) & (c, c) & (b, b) & (0 - 255) \\ (c, c) & (c, a) & (b, b) & (0 - 255) \\ (c, a) & (a, a) & (b, b) & (0 - 255) \\ (a, a) & (a, c) & (b, b) & (0 - 255) \end{bmatrix}$$

Bu örnekleme göre oluşan "A" kare matrisi $a = 0$, $b = \frac{1}{2}$, $c = 1$, $d = 0-255$ sabit verilerinden elde edilen değerler dinamik verilerin aktarılacağı "draw" fonksiyonuna dönüştürülmüş ve fonksiyona tanımlanmış verilerin çalıştığı kaynak kodu döngüsü (**Şekil 4.3**) şu şekilde tanımlanmıştır;

$f = draw(x, y, ölçek, renk a, renk b, renk c, renk d)$ fonksiyonuna göre;

- x ve y değerleri: karenin ızgaradaki konumunu (pozisyonunu) belirleyen değerler.
- Ölçek değeri: karenin yüzdelik ölçөгünü belirleyen değер.
- Renk a : tetrakis karesinin üst dik üçgenine ait RGB rengi belirleyen değер.
- Renk b : tetrakis karesinin sağ dik üçgenine ait RGB rengi belirleyen değер.
- Renk c : tetrakis karesinin alt dik üçgenine ait RGB rengi belirleyen değер.
- Renk d : tetrakis karesinin sol dik üçgenine ait RGB rengi belirleyen değер.


```

draw(0, 0, 100, "red", "green", "blue", "yellow");

function draw(x, y, scale, f1, f2, f3, f4)
{
  var x = x * scale;
  var y = y * scale;

  var a = 0 * scale;
  var b = (1/2) * scale;
  var c = 1 * scale;
  var d = [
    [a,a,c,a,b,b,f1],
    [c,a,c,c,b,b,f2],
    [c,c,a,c,b,b,f3],
    [a,c,a,a,b,b,f4]
  ];

  var canvas = document.createElement('canvas');
  var draw = canvas.getContext('2d');

  for(i=0; i<4; i++)
  {
    draw.beginPath();
    draw.moveTo(x + d[i][0], y + d[i][1]);
    draw.lineTo(x + d[i][2], y + d[i][3]);
    draw.lineTo(x + d[i][4], y + d[i][5]);
    draw.fillStyle = d[i][6];
    draw.fill();
  }

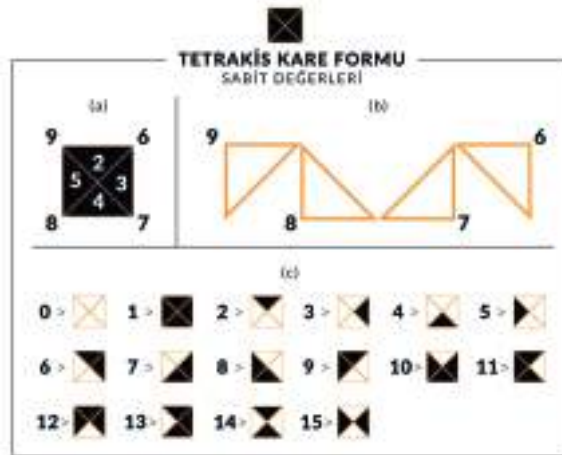
  document.body.appendChild(canvas);
}

```



Şekil 4.3. Sol Ekran: A Kare Matrisinin İçerdiği Algoritmanın Çalışan Döngüsel Kaynak Kodu. Sağ Ekran: 100 Kat Büyütülmüş Görüntü Çıktısı

4.3. Sabit Değerler



Şekil 4.4. Tetakis Kare Formu Sabitlerinin Örneklemi (a) Bir Karenin Bölünmüş Bütün Görüntüsü, (b) Bir Karenin Sabit Kombinasyonları, (c) İkili Sabit Fonksiyonların Ayrıştırılmış Görünümü

4.3.1. Mono renk değerleri

Klasik piksel altyapısında kullanılan 1 bit (0-1) değerindeki (*monochrome*) tek renkli verinin karşılığı olarak, tetrakis kare formunda ön görülebilir en düşük 4 bitlik (0-15) sabit verinin oluşturulmasına ait bulgular şu şekildedir:





4 BİTLİK (TEK RENK) RENK DEĞERLERİ											
(a)	(b)	(c)	(a) (b) (c)								
0 >		[0000]	4 >		[0100]	8 >		[1000]	12 >		[1100]
1 >		[0001]	5 >		[0101]	9 >		[1001]	13 >		[1101]
2 >		[0010]	6 >		[0110]	10 >		[1010]	14 >		[1110]
3 >		[0011]	7 >		[0111]	11 >		[1011]	15 >		[1111]

Şekil 4.5. Tetrakis Kare Formun 4 Bitlik (0-15) Sabit Veri Değeri Karşılıklarını Gösteren Grafik.

(a) Kombinasyonun Onluk Sayı Değeri, (b) Kombinasyon Formu, (c) Kombinasyonun İkilik (Bit) Sayı Değeri

4.3.2. Gri gama renk değerleri

Klasik piksel altyapısında kullanılan 8 bit (2^8) değerindeki gri gama değişken veri karşılığı olarak, tetrakis kare formun ön görülebilir en düşük 32 bitlik ($2^8 \times 4$) değişken veriyle çalışmasına ait bulgular şu şekildedir:

32 BİTLİK (GRİ GAMA) RENK DEĞERLERİ			
(a)	(b)	(c)	(d)
[00000000]	[00000000]	[00000000]	[00000000]
8bit	8bit	8bit	8bit
0-255	0-255	0-255	0-255
(a) 	(b) 	(c) 	(d) 

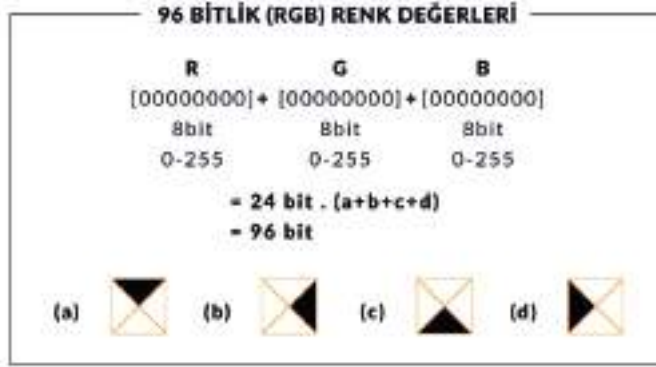
Şekil 4.6. Tetrakis Kare Formu "Gri Gama" Ve 32 Bitlik Değişken Veri Değeri Örneğini Gösteren

Grafik. (a) Tetrakis Kare Formun 2. Kombinasyonu, (b) Tetrakis Kare Formun 3. Kombinasyonu, (c)

Tetrakis Kare Formun 4. Kombinasyonu, (d) Tetrakis Kare Formun 5. Kombinasyonu.

4.3.3. RGB renk değerleri

Klasik piksel altyapısında kullanılan 24 bit ($2^8 \times 3$) değerindeki RGB (*truecolor*) değişken verinin karşılığı olarak, tetrakis kare formunda ön görülebilir en düşük 96 bitlik ($(2^8 \times 3) \times 4$) değişken verinin örnekleme ait bulgular şu şekildedir:



Şekil 4.7. Tetrakis Kare Formu "RGB" Ve 96 Bitlik Değişken Veri Değeri Örneklemini Gösteren Grafik. (a) Tetrakis Kare Formun 2. Kombinasyonu, (b) Tetrakis Kare Formun 3. Kombinasyonu, (c) Tetrakis Kare Formun 4. Kombinasyonu, (d) Tetrakis Kare Formun 5. Kombinasyonu

4.3.4. RGB + alfa kanal renk değerleri

Klasik piksel altyapısında kullanılan 32 bit ($2^8 \times (3+1)$) değerindeki RGB + alfa kanal (*truecolor + alpha channel*) değişken verinin karşılığı olarak, tetrakis kare formunda ön görülebilir en düşük 128 bitlik ($(2^8 \times (3+1)) \times 4$) değişken verinin örnekleme ait bulgular şu şekildedir:

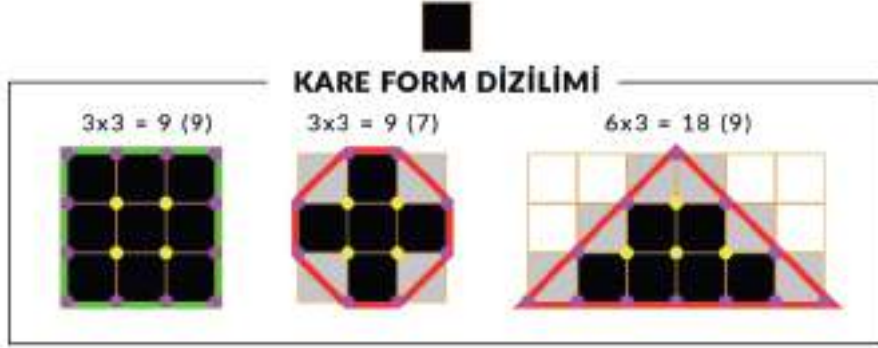


Şekil 4.8. Tetrakis Kare Formu "RGB + Alfa Kanal" Ve 128 Bitlik Değişken Veri Değeri Örneklemini Gösteren Grafik. (a) Tetrakis Kare Formun 2. Kombinasyonu, (b) Tetrakis Kare Formun 3. Kombinasyonu, (c) Tetrakis Kare Formun 4. Kombinasyonu, (d) Tetrakis Kare Formun 5. Kombinasyonu

4.4. Nesnel Karşılaştırma ve Ölçümleme

4.4.1. Kare formun görüntü oluşturma analizi

Kare form; temel düzeyde ölçüm için hazırlanmış 3 farklı geometrik şekle sahip şablon üzerinde ölçümlenmiş ve kendi formu hariç diğer tüm şemalarda düşük nitelikte görüntü oluşturmuştur (**Şekil 4.9**).



Şekil 4.9. Kare Formunun 9 Birimlik (Kare Ve Sekizgen) Ve 18 Birimlik (Eşkenar Üçgen) Şablonlar Üzerinde Oluşturulan Görüntü Analizi Grafiği

4.4.2. Tetrakis kare formun görüntü oluşturma analizi

Tetrakis kare formu; temel düzeyde ölçüm için hazırlanmış 3 farklı geometrik şekle sahip şablon üzerinde ölçümlenmiş ve şemaların tümünde 100% nitelikli görüntü oluşturmuştur (Şekil 4.10).



Şekil 4.10. Tetrakis Kare Formunun 9 Birimlik (Kare ve Sekizgen) ve 18 Birimlik (Eşkenar Üçgen) Şablonlar Üzerinde Oluşturulan Görüntü Analizi Grafiği

4.5. Sayısal Karşılaştırma ve Ölçümleme

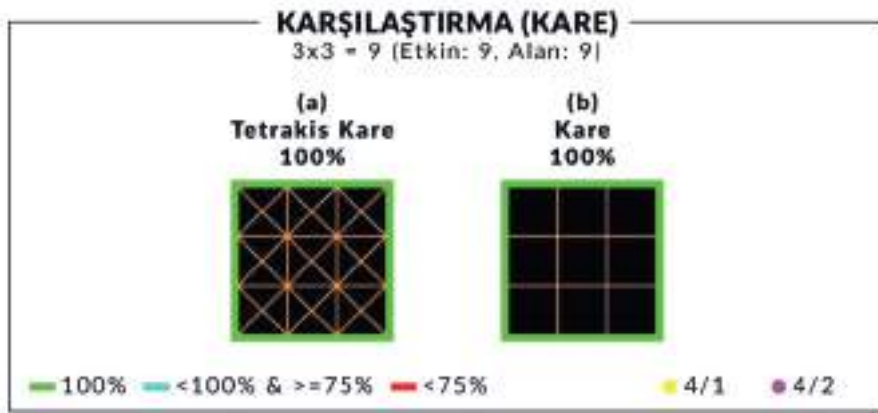
Nesnel ölçümleme sonucuna göre; kare forma kıyasla, tetrakis kare dizilimin tüm şemalarda %100 nitelikli görüntü oluşturduğunu göstermektedir. Bu nitel verinin nicel değerlere dönüşebilmesi için; kare form ile tetrakis kare dizilimi arasındaki nitelikli görüntü oluşturma yeteneğinin ölçülmesi ve analiz edilebilmesi gerektiği anlaşılmıştır.

4.5.1. Geometrik şema ölçümleri

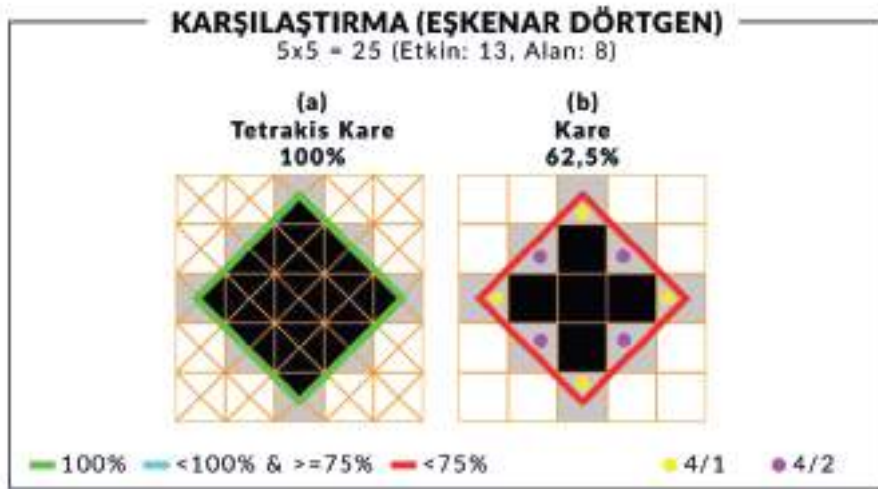
Geometrik şablonlar üzerinde elde edilen karşılaştırmalı görüntü niteliği değerleri; mozaikleme sayısı kare cinsinden birim sayısı olarak etkin (Etkin:) alan, geometrik şekle ait toplam iç alan hesaplaması ise birim sayısı olarak alan (Alan:) bilgisi altında verilmiştir. (a) işaretçisi altında tetrakis kare, (b) işaretçisi

altında kare dizilim alan hesaplaması toplamı yüzdelik değer karşılığı ile belirtilmiştir. Kapladığı alan, sağladığı nitelik değerini yansıtacağı için; alanın tamamını (100%) kaplamış ise yeşil kontür "nitelikli", alanın tamamından (100%) küçük ve dörtte üçünden (75%) büyük ise camgöbeği kontür "yakın nitelikli değer", alanın dörtte üçünden (75%) küçük ise düşük nitelikli görüntü olarak değerlendirilmiştir. Geometrik şema içinde kalan form aktif ise "siyah", dışında taşan form inaktif "gri" ve dışında kalan form (değer dışı) "beyaz" olarak işaretlenmiştir. İnaktif olan formun ölçüğü "pembe" yarım piksel ölçüsü ve "sarı" çeyrek piksel ölçüsünü ifade etmek üzere noktalar ile işaretlenmiştir.

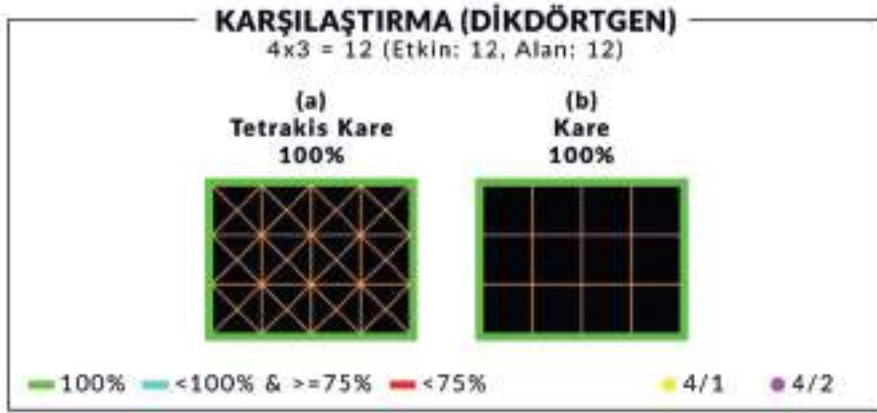
Geometrik şemalar üzerinde yapılan ölçümlerde tetrakis kare (a) ile kare (b) formun oluşturduğu mozaikleme karşılaştırmaları şu şekildedir:



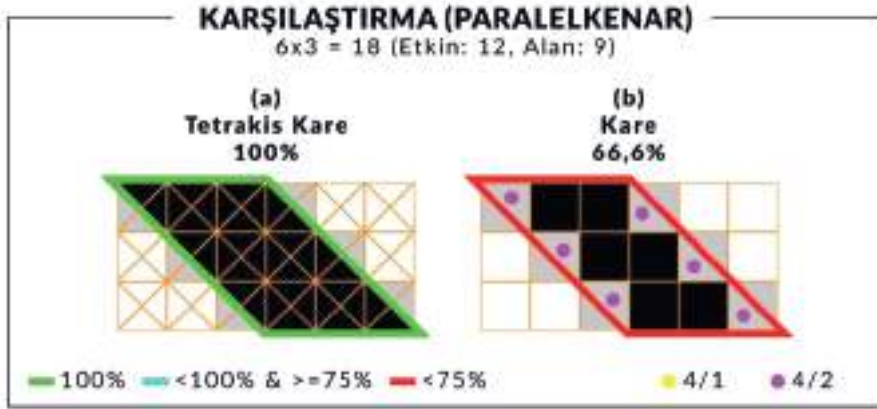
Şekil 4.11. 9 Birimlik Alan ve Kare Form Üzerinde Yapılan Karşılaştırma Grafiği



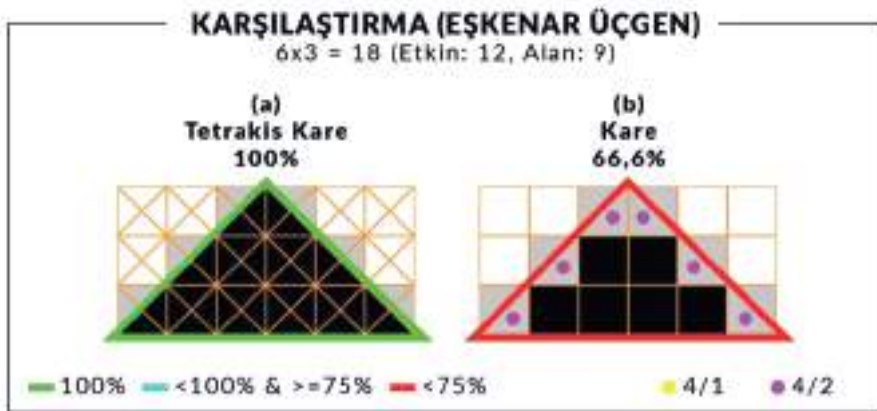
Şekil 4.12. 25 Birimlik Alan ve Eşkenar Dörtgen Form Üzerinde Yapılan Karşılaştırma Grafiği



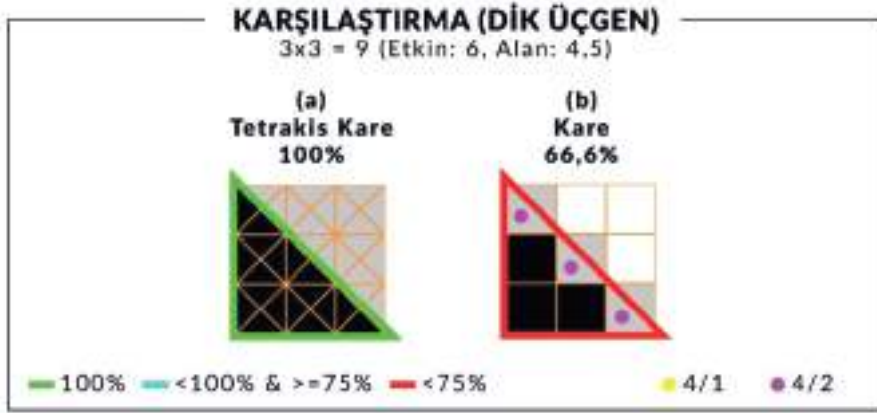
Şekil 4.13. 12 Birimlik Alan ve Dikdörtgen Form Üzerinde Yapılan Karşılaştırma Grafiği



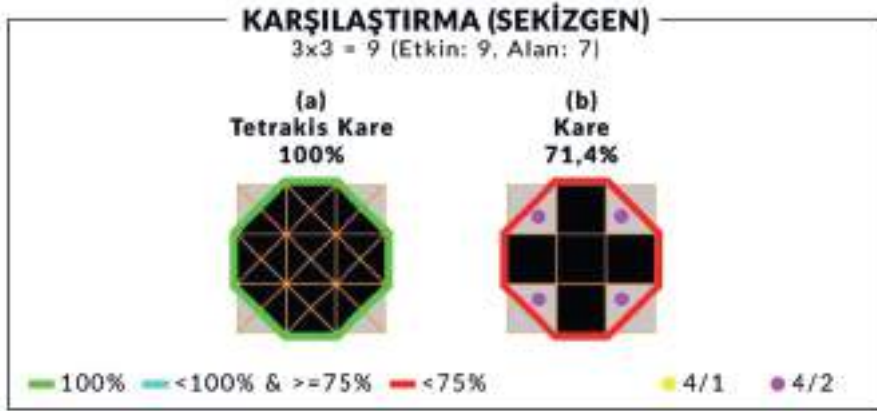
Şekil 4.14. 18 Birimlik Alan ve Paralelkenar Form Üzerinde Yapılan Karşılaştırma Grafiği



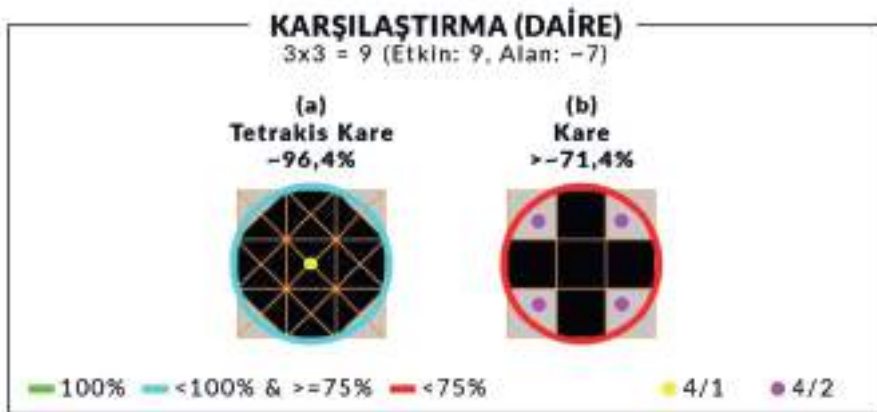
Şekil 4.15. 18 Birimlik Alan ve Eşkenar Üçgen Form Üzerinde Yapılan Karşılaştırma Grafiği



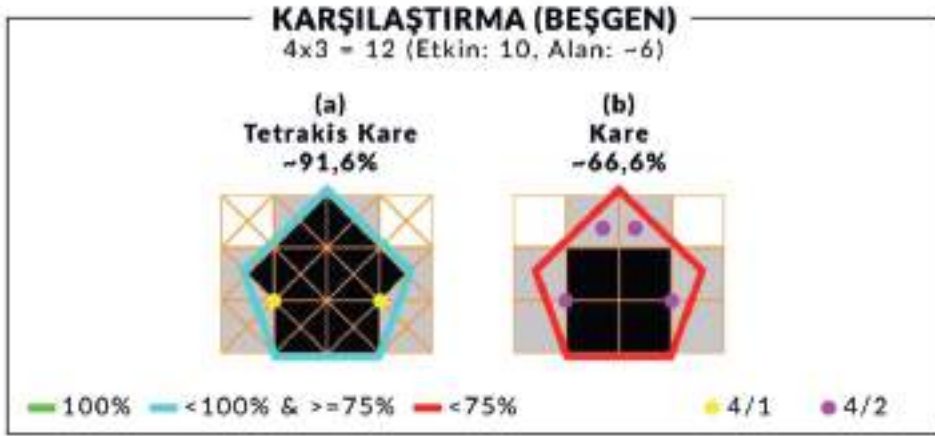
Şekil 4.16. 9 Birimlik Alan ve Dik Üçgen (45-45-90) Form Üzerinde Yapılan Karşılaştırma Grafiği



Şekil 4.17. 9 Birimlik Alan ve Sekizgen Form Üzerinde Yapılan Karşılaştırma Grafiği



Şekil 4.18. 9 Birimlik Alan ve Daire Form Üzerinde Yapılan Karşılaştırma Grafiği



Şekil 4.19. 12 Birimlik Alan ve Beşgen Form Üzerinde Yapılan Karşılaştırma Grafiği

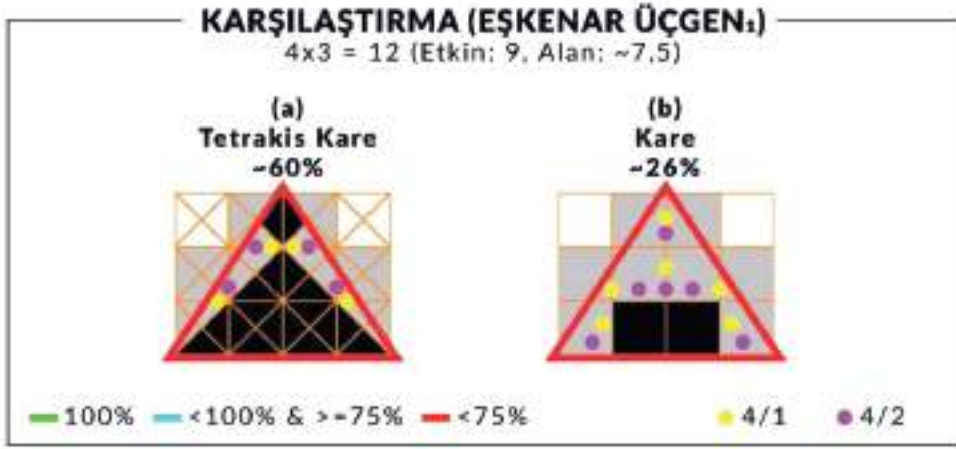


Şekil 4.20. 9 Birimlik Alan ve Hilal Form Üzerinde Yapılan Karşılaştırma Grafiği

4.5.2. Düşük nitelikteki şema ölçümleri

Geometrik şemalar içinde, tetrakis kare diziliminde dik açı ve dar açı arasında kalan diğer tüm açılarda ve iki tam kare değer aralığında kaldığı durumlarda düşük nitelik değerleri gözlemlenmiştir. Bu düşük değerler kare formlarda da gözlemlenmektedir. Tetrakis kare formu, kare formun oluşturduğu görüntü değerine oranla en düşük 1,5 (Şekil 4.21) en yüksek 2,3 kat daha nitelikli sonuç elde etmiştir (Şekil 4.22).

Temel geometrik şemalar üzerinde yapılan ölçümlerde değer kaybı görülen tetrakis kare (a) ile kare (b) formu karşılaştırmaları şu şekildedir:



Şekil 4.21. 12 Birimlik Alan ve Eşkenar Üçgen Form Üzerinde Yapılan Karşılaştırma Grafiği

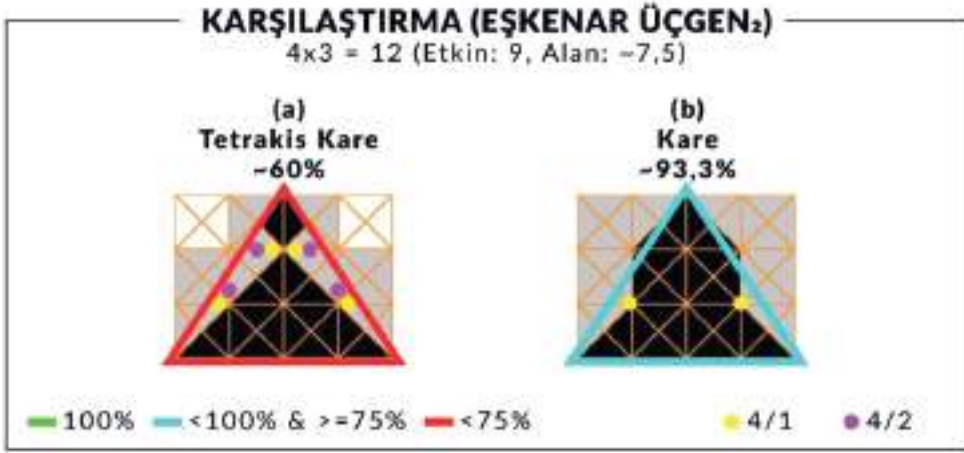


Şekil 4.22. 9 Birim Alan ve Elips Form Üzerinde Yapılan Karşılaştırma Grafiği

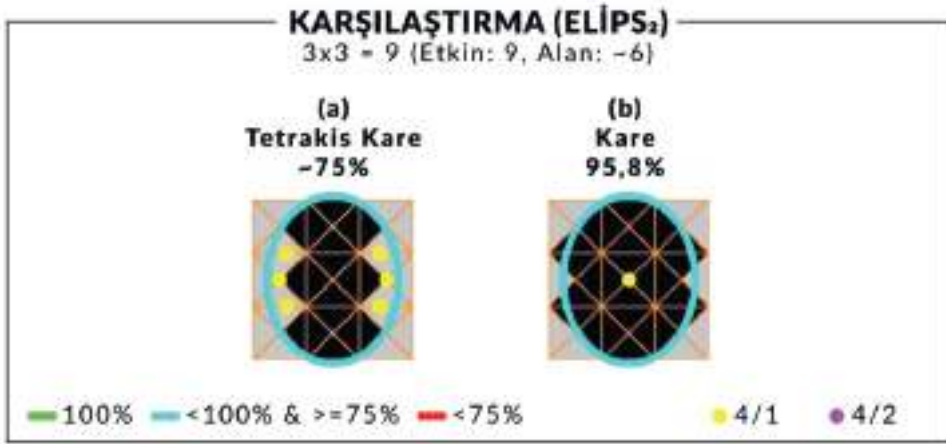
4.5.3. Düşük değerın giderilmesine yönelik bulgular

Tetrakis kare dizilimi; "geometrik şemalar içinde kalan parçacığın kütlesi, dışında kalan kısımına oranla büyük ise form aktif olur" kuralı uygulandığında %60 olan görüntü değeri %93,3 değerine (Şekil 4.23), %75 olan değer ise %95,8 değerlerine (Şekil 4.24) kadar yükseldiği gözlemlenmiştir.

Geometrik şemalar üzerinde yapılan ölçümlerde, yukarıda bahsedilen kuralın (a) uygulanmamış hali ile (b) uygulanmış haline ait karşılaştırmalar şu şekildedir:



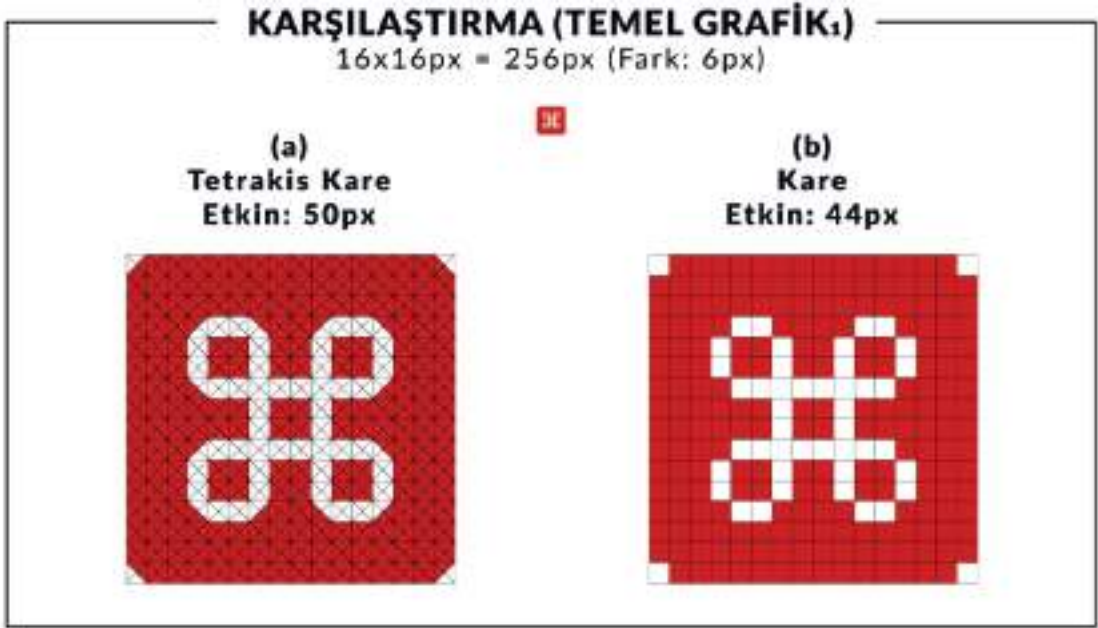
Şekil 4.23. %50'den Büyük Alanların Aktifleştirilmesi İle İyileştirilmiş Eşkenar Üçgen Formu Grafiği



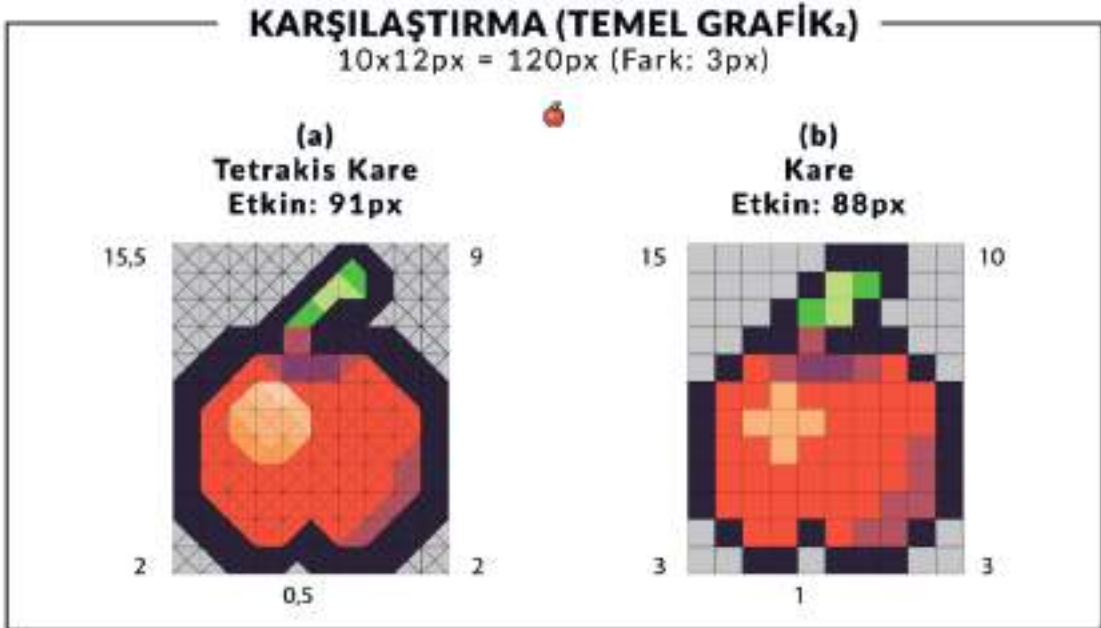
Şekil 4.24. %50'den Büyük Alanların Aktifleştirilmesi İle İyileştirilmiş Elips Formu Grafiği

4.6. Grafik Şema Örnekleri

Grafik şemalarda yapılan *monochrome* (Şekil 4.25) ve RGB (Şekil 4.26) örnekleri kare sayısı arttıkça ve nesneye ait form karmaşıklıklaştıkça, kare forma oranla tetrakis kare form mozaiklemede nitelikli görüntüyü daha somut biçimde oluşturduğu görülmektedir.



Şekil 4.25. Temel Grafik₁ (Monochrome) Şema Karşılaştırması (256 Piksellik Dönen Çizgi Motifi), (a) Tetrakis Kare Dizilimi İle Üretilmiş Görüntü, (b) Kare Form Dizilimi İle Üretilmiş Görüntü

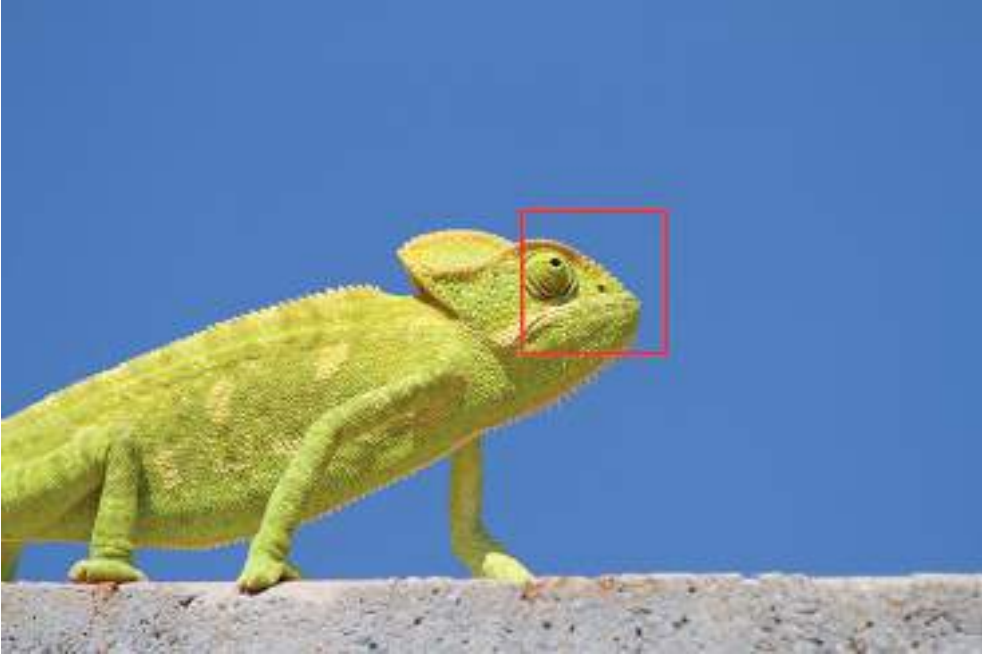


Şekil 4.26. Temel Grafik₂ (RGB) Şema Karşılaştırması (120 Piksellik Elma Motifi), (a) Tetrakis Kare Dizilimi ile Üretilmiş Görüntü, (b) Kare Form Dizilimi İle Üretilmiş Görüntü

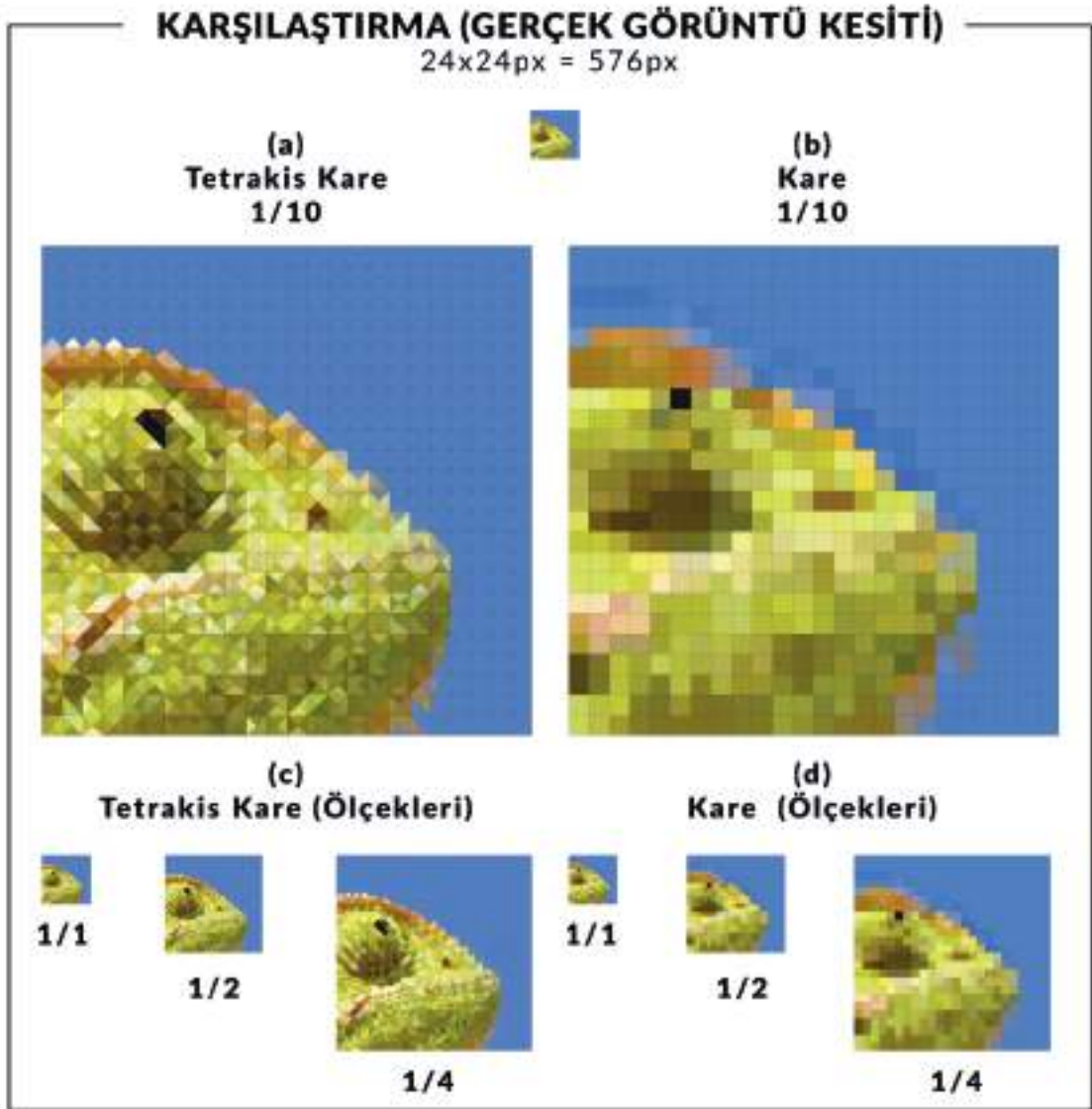
4.7. Gerçek Görüntü Kesiti Örnekleme

Tetrakis kare formu ile kare form arasında, gerçek görüntü üzerinde değerlerin ve niteliğin karşılaştırılabilmesi için aşağıda bulunan dijital fotoğraf (**Görsel 4.14**) içinden alınan (kırmızı çerçeve ile belirtilmiş) kesit, her iki formun oluşturduğu 24 piksellik görüntü örgüsü (mozaikleme) ile yine aşağıda bulunan (**Şekil 4.27**) şekilde nitel olarak incelenmiştir. Görüntünün işleme sürecinde şu aşamalar uygulanmıştır;

- Orijinal görüntü içinden alınan 1-1 kare kesit (24px*24px) 72dpi değerlerinde ölçeklenmiştir.
- Sol kısımdaki örneklem (Tetrakis Kare) kare formun tetrakis kare formuna bölünmesi ve tetrakis kare içeriğinde bulunan her bir üçgenin konumunda bulunan renk değeri görüntünün orijinalinde bulunan pikselden alınarak 1-1, 1-2, 1-4 ve 1-10 ölçeklerinde işlenmiştir.
- Sağ kısımdaki örneklem (Kare) orijinal görüntü ızgarası üzerinde oynama yapılmadan 1-1, 1-2, 1-4 ve 1-10 ölçeklerinde işlenmiştir.
- Bu örneklem tetrakis kare dizilimin gerçek görüntü üzerinde nitel etkilerini gözlemlemek amacı ile üretildiği için değer ölçümü yapılmamış ve sayısal ölçeklere eklenmemiştir.



Görsel 4.14. Sharath G., "Duvarın Üstündeki Bukalemun", Gerçek Görüntü Örneği (Görüntü Üzerinde Kırmızı Çerçeve İle İşaretlenen Alan 24px*24px Örneklem Alanı Olarak Kullanılmıştır)



Şekil 4.27. Dijital Fotoğraftan Alınan 24x24 Piksellik (576px) Görüntü Kesitinin İncelemesini Gösteren Grafik. (a) Tetrakis Kareleri İle Oluşturulan Görüntü Örgüsü, (b) Kare Formlar (Pikseller) ile Oluşturulan Görüntü Örgüsü (Orijinal Görüntü), (c ve d) Oluşturulan Görüntü Örgüsünün 1-1, 1-2, 1-4 Ölçeklerdeki Gösterimi

4.8. Bulguların Veri Analizleri

4.8.1. Bulgulardan elde edilen verilerin tablo gösterimi

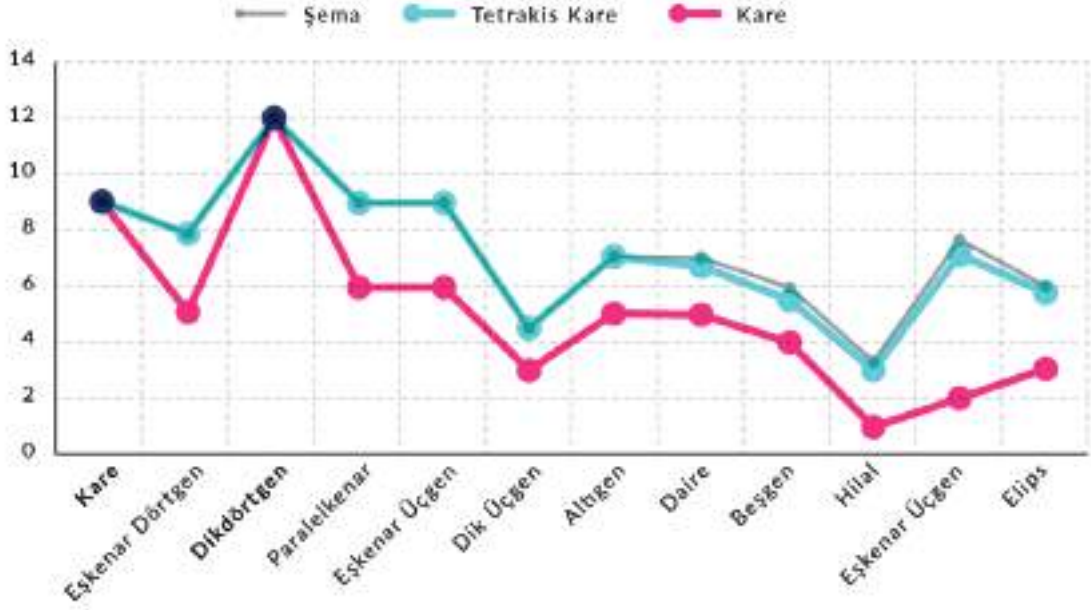
Bulgular kısmında ölçüm amacı ile kullanılan 12 adet geometrik şema ve bu şemalar üzerinde yapılan tetrakis kare ile kare arasındaki karşılaştırma sonuçları aşağıda yer alan **Tablo 4.2.** içeriğinde belirtilmiştir. 12 adet şema üzerinde yapılan tetrakis kare ve kare dizilim karşılaştırmalarında, tetrakis kare formu, 12 şemanın 7'sinde nitelikli (%100) ve 5'inde (ortalama %93,88) belirlenen yaklaşık nitelikli değer aralığında sonuç elde ettiği görülmüştür. Kare form ise 12 şemanın 2'sinde 100% nitelikli ve 10'unda belirlenen düşük nitelikte sonuç elde ettiği görüldü. 12 şemanın toplam görüntü alanı 88,25 birim olarak hesaplanmıştır. Tetrakis kare formu bu toplam alanın %98'ini (86,5 birim), kare form ise %69'unu (61 birim) doldurabilmektedir. Tetrakis kare form şema başına düşen yaklaşık 7,35 birimlik etkin alanın 7,2 birimlik alanını doldururken, kare form 5 birimlik alanı doldurduğu görülmektedir.

No	Ölçüm Şeması	Alan (birim)	Tetrakis kare (birim-%)	Kare (birim-%)	Fark (birim)	Fark (%)
1	Kare	9	9 – 100%	9 – 100%	0	0%
2	Eşkenar Dörtgen	8	8 – 100%	5 – 62,5%	3	37,5%
3	Dikdörtgen	12	12 – 100%	12 – 100%	0	0%
4	Paralelkenar	9	9 – 100%	6 – 66,6%	3	33,3%
5	Eşkenar Üçgen	9	9 – 100%	6 – 66,6%	3	33,3%
6	Dik Üçgen	4,5	4,5 – 100%	3 – 66,6%	1,5	33,3%
7	Altıgen	7	7 – 100%	5 – 71,4%	2	28,6%
8	Daire	~7	6,75 – 96,4%	5 – 71,4%	1,75	25%
9	Beşgen	~6	5,5 – 91,6%	4 – 66,6%	1,5	25%
10	Hilal	~3,25	3 – 92,3%	1 – 30,7%	2	61,6%
11	Eşkenar Üçgen ₂	~7,5	7 – 93,3%	2 – 25%	5	68,3%
12	Elips ₂	~6	5,75 – 95,8%	3 – 50%	2,75	45,8%
	Toplam Değer	~88,25	86,5 – 98%	61 – 69%	25,5	391,7%
	Ortalama Değer	~7,35	7,2 – 98%	5 – 69%	2,12	32,6%

Tablo 4.2. Temel Ölçüm Değerlerinin Karşılaştırma Tablosu (Hücre renkleri; yeşil: nitelikli değer, camgöbeği: yaklaşık nitelikli değer, kırmızı: düşük nitelikli değerleri ifade etmektedir.)

4.8.2. Bulgulardan elde edilen verilerin grafik gösterimi

Tetrakis kare ile kare formun karşılaştırılmasından elde edilen sayısal verilerin, grafik üzerinde gösterimi aşağıda yer almaktadır (**Şekil 4.28**). Grafikte görüleceği üzere camgöbeği renginde çizgi ile ifade edilen tetrakis kare formu, gri ile çizilen nitelikli görüntü değerlerini %98 oranında takip etmektedir. Kare form ise gri ile çizilen nitelikli görüntü değerini %69 oranında pembe çizgi ile takip ettiği görülmektedir.



Şekil 4.28. Temel Ölçüm Değerlerinin Karşılaştırma Grafiği (Gri Çizgi: Nitelikli Değerler, Yeşil Çizgi: Tetrakis Kare Dizilimi Değerleri, Pembe Çizgi: Kare Dizilimi Değerleri)

4.8.3. Bulgulardan elde edilen verilerin analizi

(Tablo 2 ve Şekil 28) verilerine göre şu sonuçlara ulaşılmıştır:

- Kare formu mozaikleme kendi formu dışında nitelikli değer aralığında görüntü oluşturamadığı gözlemlenmiştir.
- Tetrakis kare formu jenerik kaynak kodu ile örneklenmiştir.
- Tetrakis kare formun dizilimi görüntü oluşumunda kare forma kıyasla en az %25, en çok %68,3 ve ortalama olarak %32,6 oranında daha nitelikli görüntü oluşturmuştur.
- Tetrakis kare formun dizilimi 12 geometrik şemanın 7'sinde (%58,3'ünde) nitelikli görüntü, 5'inde (%41,6'sında) yakın nitelikte görüntü oluşturmuştur.
- Tetrakis kare dizilimi 12 geometrik şemanın tamamında nitelikli (%100-%75) değer aralığında görüntü oluşturmuştur.
- Grafik şemalar ve gerçek görüntü örneklemeleri: tetrakis kare formun dizilimi, kare formun dizilimine kıyasla görüntünün nesnel bütünlüğünü koruduğu gözlemlenmiştir.
- Tetrakis kare formun dizilimi ortalama %98 oranda nitelikli görüntü oluşturmuştur.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

5.1. Tartışma

Araştırmanın bulgular bölümünün ilk kısmında 3 geometrik şema üzerinde tetrakis kare ve kare formların dizilimleri nicel olarak incelenmiş, kare form 3 şemanın 1'inde ve tetrakis kare form 3 şemanın 3'ünde %100 nitelikte görüntü elde ettiği gözlemlenmiştir. Tetrakis kare formun sayısal ve sabit değerleri tanımlanmış belirlenen algoritma kullanılarak jenerik kaynak kodu üzerinde örnek çıktısı üretilmiştir. Mevcut sistemlerle uyumluluğu sorgulanarak, sabit ve değişken değerleri 16 farklı kombinasyonda 4 bitlik değerle tanımlanmıştır (Mackenzie, 1980).

Bulguların ikinci kısmında tetrakis kare dizilimi ile kare dizilimi 12 geometrik şema üzerinde ölçümlenmiştir. 12 şemanın 2'sinde tetrakis kare formun belirlenen nitelikli değer aralığının altında kaldığı görülmüştür. Bu durum ayrı bir başlık altında incelenmiş ve tetrakis kare formun, dik açı ve dar açı arasında kalan diğer tüm ara açılarda ve iki tam kare değer aralığında kaldığı durumlarda nitelikli değerlerin altında kaldığı tespit edilmiştir. Bu tespit üzerine "geometrik şemalar içinde kalan parçacığın kütlesi, dışında kalan kısımdan büyük ise parçacık aktif olur" kuralı uygulanarak değerler en düşük %60'dan %93,3'e, en yüksek %75'den %95,8 değere ulaştığı görülmüştür. Bu bulgular sonucunda tetrakis kare dizilimi, 12 farklı şemanın 7'sinde %100, 5'inde ortalama %93,88 değerinde nitelikli görüntü oluşturmuş ve şemaların genelinde %98 nitelikte görüntü oluşturduğu tespit edilmiştir. Kare form ise 12 şemanın yatay ve dikey ekseninde kendi formu olan tam kare ve dikdörtgen dışında kalan diğer 10 şemada en düşük %25, en yüksek %71,4 değer ile ortalama %69 oranda düşük nitelikte görüntü oluşturduğu anlaşılmıştır.

Tetrakis kare ve kare form diziliminin görüntü oluşturma yeteneğinin daha somut örneklenmesi için iki farklı renk sistemiyle (*monochrome* ve RGB) grafik şema üzerinde karşılaştırması yapılmıştır.

İlk karşılaştırma tek renkli (*monochrome*) 256 piksellik (16x16) görüntü dizilimi üzerinde yapılmıştır. Karşılaştırma sonucunda tetrakis kare dizilimi 6 piksellik fark ile iki boyutlu nesnenin formunu kare forma kıyasla daha nitelikli değer aralığında oluşturmuştur.

İkinci karşılaştırma 24 bitlik RGB (*truecolor*) 120 piksellik (10x12) görüntü dizilimi üzerinde yapılmıştır. Bu aşamada tetrakis kare formun her bir parçasının ayrı renk değerlerine sahip olması gerektiği anlaşılmıştır. Tespit edilen bu problem üzerine tetrakis kare formun yapısı yeniden değerlendirilip revize edilmiş ve kare formun çalışma prensibi ile eşleştirilerek her bir parçacığın bir kare form değeri gibi çalışması işlem zorluğunu 4 kat arttırarak sorunu çözüme ulaştırmıştır. Bu nedenle tetrakis kare formun; tek renkte 1 bit yerine 4 bit, gri gama değerinde 8 bit yerine 32 bit, RGB değerinde 24 bit yerine 96 bit, RGB + Alfa kanal değerinde 32 bit yerine 128 bit değerlerinde çalışması gerektiği anlaşılmıştır. Bu yapı tanımlaması ile ikinci grafik şema karşılaştırması ilk karşılaştırmada olduğu gibi, 3 piksellik fark ile tetrakis kare formu kare forma kıyasla daha nitelikli değer aralığında oluşturmuştur.

Üçüncü ve son karşılaştırma yüksek çözünürlüklü görüntüden alınan kare kesit, 24x24 piksellik ölçeğe düşürülerek tetrakis kare dizilimin oluşturduğu mozaikleme nicel olarak kare formun dizilimi ile karşılaştırılmıştır. Tetrakis kare formun kare forma kıyasla 1-1, 1-2, 1-4, 1-10 ölçeklerindeki gösterimi sonucunda, her bir ölçekte görüntünün niteliğini korumayı başardığı gözlemlenmiştir.

Araştırmanın bulgularından elde edilen veriler ve analiz sonuçları bu çalışmada belirtilen hipotezleri desteklediği anlaşılmıştır.

5.2. Sonuç ve Öneriler

5.2.1. Sonuç

Günümüzde dijital görüntü; iki boyutlu düzlemde (x, y) kare forma sahip noktaların (piksellerin) sonlu dizilimi ile oluşturulmaktadır. Bu sonlu mozaikleme dijital geometride raster görüntünün niteliğini düşürmekte ve düşük çözünürlüklerde geometrik kırılmalara neden olmaktadır. Dijital geometride kare form ile Öklidyen yarı düzenli mozaikler grubunda yer alan kesik kare dizilimin (*truncated quadrille*) çift-tekdüze türevi olan tetrakis kare (4.8.8) formun (*kisquadrille*) oluşturduğu görüntü örgüsünde nitel ve nicel farklılıklar karşılaştırılmıştır. Karşılaştırma sonucunda kare formun %69 oranla düşük nitelikte, tetrakis kare formun ise %98 oranda yaklaşık nitelikli görüntü oluşturduğu anlaşılmıştır. Tetrakis kare dizilimine ait algoritma kartezyen koordinat sistemi üzerinde incelenmiş ve döngüsel kod örnekleme yapılarak çıktısı alınmıştır. Oluşturulan algoritma esas alınarak hazırlanan grafik ve gerçek görüntü üzerinde yapılan örneklemler düşük sayıdaki ölçüm farklılıklarının görüntü niteliğini değiştirdiği anlaşılmıştır. Bu değişim mozaiklemede en küçük parçacığın geometrik formunun, görüntü oluşturmadaki önemini açıkça ortaya koymuştur.

Sonuç olarak dijital geometri ve dijital görüntü alanında, kare form dizilimi; daha az veriyle daha düşük nitelikteki görüntüyü oluştururken, tetrakis kare dizilimi; daha yüksek veriyle, daha nitelikli görüntüyü oluşturduğu anlaşılmıştır. Ayrıca kare forma kıyasla, tetrakis kare dizilimi sonlu mozaiklemede daha az parçacıkla daha nitelikli görüntüyü oluşturmuştur.

5.2.2. Öneriler

- I. Yapılan karşılaştırmaların yazılım üzerinde geliştirilmesi, ölçümlerin otomatikleştirilmesini ve karşılaştırılan formun zorluk derecesini arttırarak daha verimli sonuca ulaşmayı sağlayacaktır.
- II. Grafik şemaların yazılım üzerinde zorluk derecesi ve sayısı arttırılarak incelendiğinde daha sağlıklı verilerin elde edilmesini sağlayacaktır.
- III. Gerçek görüntü şemaların yazılım üzerinde zorluk derecesi ve sayısı arttırılarak incelendiğinde daha sağlıklı verilerin elde edilmesini sağlayacaktır.
- IV. Tetrakis kare diziliminin bu çalışmada verilen algoritmaya ek olarak, komşu pikseller ilişkisine ait algoritmaların kurulması daha nitelikli görüntü oluşturmada etkili olacaktır.

- V. Bu araştırmada elde edilen bulgular, diğer teknolojik alanlarla oluşacak bağıntıları ve hipotezleri şu öneriler ile genişletilebilir;
- Tetrakis kare dizilimi, raster görüntülerin vektörel görüntüye dönüştürülmesinde alternatif bir model olarak kullanılabilir.
 - Dijital görüntü sistemlerinde donanımsal alt yapı ile desteklenmesi görüntü oluşumunda ve görüntünün yansıtılmasında daha düşük oranda değer kaybı sağlayabilir.
 - Düşük çözünürlükteki görüntüleme sistemlerinde alternatif bir görüntü örgüsü modeli olarak değerlendirilebilir.

BEYANLAR / DECLARATIONS

Etik İlkelerine Uygunluk Beyanı

“COPE-Dergi Editörleri İçin Davranış Kuralları ve En İyi Uygulama İlkeleri” çerçevesinde aşağıdaki beyanlara yer verilmiştir:

Bu çalışmanın yazarları bu çalışma için Etik Kurul onayı gerekmediğini beyan etmişlerdir.

Declaration of Compliance with the Ethical Principles

In line with the “COPE-Code of Conduct and Best Practice Guidelines for Journal Editors” the following statements are included:

The authors of this study declared that the Ethics Committee approval is not required for this study.

KAYNAKÇA

REFERANSLAR

Computer graphics. (2008, July 23). Kasım 2021 tarihinde Wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/Computer_graphics adresinden alındı

Eves, H. (1990). *An Introduction to the History of Mathematics*. Philadelphia: Saunders College Pub.

Gombrich, E. H. (2015). *Sanat ve yanılısama - resim yoluyla betimlemenin psikolojisi*. İstanbul: Remzi Kitabevi.

Gonzalez, R. C., & Woods, R. E. (2018). *Digital image processing*. New York, NY: Pearson.

Hall, B. C. (2003). *Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction*. New York: Springer.

Heath, T. L. (1956). *The Thirteen Books of the Elements* (Cilt 2). Second Edition Unbridged.

Hyman, A. (2007). *Science and Reform: Selected Works of Charles Babbage*. Cambridge: Cambridge University Press.

Judd, D. B., & Wyszecki, G. (1975). *Color in Business, Science and Industry*. Wiley Series in Pure and Applied Optics (third ed.). New York: Wiley-Interscience., s. p. 388.

List of Euclidean uniform tilings. (2005, October 12). Aralık 2021 tarihinde Wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_Euclidean_uniform_tilings adresinden alındı.

Mackenzie, C. E. (1980). *Coded Character Sets: History and Development*. Michigan: Addison-Wesley Publishing Company.

Öklid. (2005, Temmuz 27). Aralık 2021 tarihinde Wikipedia: <https://tr.wikipedia.org/wiki/Öklid> adresinden alındı

Pythagorean theorem. (2021, September 20). Aralık 2021 tarihinde Wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/Pythagorean_theorem adresinden alındı

Raster graphics. (2001, September 24). Kasım 2021 tarihinde Wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/Raster_graphics adresinden alındı

Schwarz triangle. (2005, June 18). Aralık 2021 tarihinde Wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/Schwarz_triangle adresinden alındı

Special right triangle. (2005, July 21). Aralık 2021 tarihinde Wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/Special_right_triangle adresinden alındı

Tetrakis square tiling. (2005, October 11). Aralık 2021 tarihinde Wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/Tetrakis_square_tiling adresinden alındı

Vector graphics. (2001, August 1). Kasım 2021 tarihinde Wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/Vector_graphics adresinden alındı

Wythoff symbol. (2006, January 11). Aralık 2021 tarihinde Wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/Wythoff_symbol adresinden alındı

GÖRSEL REFERANSLAR

Görsel 2.1. Aralık, 2022 tarihinde; Eco, U. (2018). *Antik Roma: Mozaikler – Taştan Halılar*. (s. XXVIII-XXIX). İstanbul: Alfa Yayınları, kitabından alınmıştır.

Görsel 2.2. Aralık, 2022 tarihinde; Gombrich, E. H. (2015). *Sanat ve yanılsama- resim yoluyla betimlemenin psikolojisi*. (s. 35) İstanbul: Remzi Kitabevi, kitabından alınmıştır.

Görsel 2.3. Aralık, 2022 tarihinde; https://en.wikipedia.org/wiki/Jacquard_machine URL adresinden alınmıştır.

Görsel 2.4. Aralık, 2022 tarihinde; https://en.wikipedia.org/wiki/Punched_card URL adresinden alınmıştır.

Görsel 2.5. Aralık, 2022 tarihinde; https://en.wikipedia.org/wiki/Vector_graphics URL adresinden alınmıştır.

Görsel 2.6. Aralık, 2022 tarihinde; http://www.ibrahimcayiroglu.com/Dokumanlar/Goruntulsleme/Goruntu_Isleme_Ders_Notlari-1.Hafta.pdf URL adresinden alınmıştır.

Görsel 2.7. Aralık, 2022 tarihinde; <http://computerscience.chemeketa.edu/cs160Reader/DataRepresentation/ImageRepresentation.html> URL adresinden alınmıştır.

Görsel 2.8. Aralık, 2022 tarihinde; https://tr.wikipedia.org/wiki/Pisagor_teoremi URL adresinden alınmıştır.

Görsel 2.9. Aralık, 2022 tarihinde; <https://en.wikipedia.org/wiki/Euclid> URL adresinden alınmıştır.

Görsel 2.10. Aralık, 2022 tarihinde; https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_Euclidean_uniform_tilings URL adresinden alınmıştır.

Görsel 2.11. Aralık, 2022 tarihinde; https://en.wikipedia.org/wiki/Wythoff_symbol URL adresinden alınmıştır.

Görsel 2.12. Aralık, 2022 tarihinde; https://en.wikipedia.org/wiki/Coxeter-Dynkin_diagram URL adresinden alınmıştır.

Görsel 2.13. Aralık, 2022 tarihinde; https://en.wikipedia.org/wiki/Coxeter-Dynkin_diagram URL adresinden alınmıştır.

Görsel 2.14. Aralık, 2022 tarihinde; <https://www.pexels.com/tr-tr/fotograf/duvarin-ustundeki-bukalemun-3579864/> URL adresinden alınmıştır.

TABLO REFERANSLARI

Tablo 2.1. Aralık, 2022 tarihinde; https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_Euclidean_uniform_tilings URL adresinden alınan bilgiler ile oluşturulmuştur.